Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

DIPLOMARBEIT

Strategien zur Sicherung von Netzwerken

eingereicht von: Jan Hoffmeyer
geboren am 07. Oktober 1978
in Blankenburg

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Waldmann

eingereicht am 23. März 2006

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit Strategien zur Sicherung von Netzwerken. Anhand des Spieles „Havannah“ werden die unterschiedlichen Strategien vorgestellt. Es werden die Originalregeln des Autors verwendet. Wichtige Punkte zur statischen Bewertung der Stellung, das Erkennen von Ringen, Brücken und Gabeln, Ringandrohung und die Grundtaktiken, werden erarbeitet.

Inhaltsverzeichnis

1 Das Spiel Havannah **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Gliederung . . . 2
1.3 Spielregeln . . . 2

2 Netzwerk **7**
2.1 Graphendefinition . . . 7
2.2 Modellierung . . . 8
2.3 Nachbarschaft . . . 8
2.4 Entfernung . . . 9
2.5 Wege . . . 9
2.6 Faltung . . . 10

3 Spielbrett **13**
3.1 Koordinatensystem . . . 13
3.2 Entfernungen . . . 16
3.3 Nachbarschaft . . . 17

4 Verbindungen **19**
4.1 Brücke . . . 20
4.2 Kette . . . 20
4.3 Gruppe . . . 21
4.4 Stufe . . . 23
4.5 Pfad . . . 25
4.6 Ring . . . 33

5 Strategien **35**
5.1 Struktur-Entwicklung . . . 35
5.1.1 Entwicklung mit Brücken . . . 35
5.1.2 Verbindungsmaximierung/-minimierung . . . 35
5.1.3 Blockieren . . . 37
5.2 Knotenpunkte . . . 40
5.3 Territorium . . . 40
5.4 Erzwungende Spielzüge . . . 44
5.5 Muster . . . 45
5.5.1 Verbindungsmuster . . . 46

5.5.2 Flächenmuster 46
5.6 Leiter 49

6 Interessante Spielsituationen **55**
6.1 Matt in X Zügen 55
6.2 maximale sichere Kantenentfernung 56
6.3 Doppelkreis 58

7 Fazit **61**

A Glossar **63**

Abbildungsverzeichnis

1.1 Havannah Spielfeld . . . 3
1.2 Havannah Spielfeld Ecksteine . . . 3
1.3 Havannah Spielfeld Randsteine . . . 4
1.4 Havannah Siegbedingung Brücke . . . 4
1.5 Havannah Siegbedingung Gabel . . . 5
1.6 Havannah Siegbedingung Ring . . . 5

2.1 Beispielgraph . . . 8
2.2 Überführung Graphenmodell . . . 8
2.3 Beispiel Nachbarschaft . . . 9
2.4 kantenbewerteter Graph . . . 9
2.5 Beispielwege in einem Graph . . . 10
2.6 Faltung eines induzierten Teilgraph . . . 11

3.1 Standardkoordinatensystem . . . 14
3.2 XYZ Koordinatensystem . . . 14
3.3 Entfernungen auf dem Spielbrett . . . 16

4.1 Spielbrett Legende . . . 20
4.2 Brücken-Verbindung zwischen zwei schwarzen Spielsteinen. . . . 20
4.3 Ketten (a,b) . . . 21
4.4 Typen von Ketten . . . 21
4.5 Gruppe mit den Ketten ($\boldsymbol{a,b}$) sowie der freien Punktmenge p,q . . . 23
4.6 Gruppe, angrenzende Stufe und Brückenstufe . . . 23
4.7 Erweiterung von 2 Stufen der Form 2-step in eine 1-step. . . . 24
4.8 Stufenerweiterung von 1-step zu 2-step . . . 26
4.9 Pfad . . . 27
4.10 Pfaderweiterung . . . 27
4.11 Pfadvereinigung . . . 29
4.12 Aufspannender Pfad 2-path . . . 30
4.13 Verbindungsproblem zwischen 0-path und 2-path . . . 32
4.14 Beispielring . . . 34

5.1 Unterschied zwischen direkter Nachbarschaft und Brücken . . . 36
5.2 Verbindungsmaximierung . . . 36
5.3 Blockade in die direkte Nachbarschaft . . . 38

5.4 Blockade auf Pivot-Punkte von Brückenstufen 38
5.5 Blockade in der Nachbarschaft von Pivot-Punkten 39
5.6 Knotenpunkte 41
5.7 Knotenpunkte 41
5.8 Territorium von Weiß 42
5.9 Entwicklung des Territorium 43
5.10 Territorium bei überlappenden Brücken 44
5.11 Erzwungender Zug durch Schwarz 44
5.12 Erzwungender Zug durch Ringandrohung 45
5.13 Verbindungsmuster eines Spielsteines 46
5.14 Übersicht Flächenmuster 47
5.15 Flächenmuster IVa 47
5.16 Flächenmuster IVa Angriffspunkt 47
5.17 Berechnungsbeispiel Flächenmuster IVb 47
5.18 Leiter Formationen 49
5.19 Leiter Beispiel 50
5.20 Leiter Beispiel 2 51
5.21 Ausbruch aus einer Leiter 53
5.22 Ausbruch aus einer Leiter Fortsetzung 54

6.1 Beispielpfad mit Entfernung 57
6.2 Doppelkreis Formation 58
6.3 Doppelkreis Schlüsselpunkt 59

Tabellenverzeichnis

3.1 Komplexitäts- und Speichervergleich 15

6.1 Pfadbreite in Abhängigkeit der Entfernung 57
6.2 maximale Ausdehnung durch Brücken 58

Kapitel 1

Das Spiel Havannah

Das Spiel Havannah, entwurfen von Christian Freeling, wurde im Jahr 1983 vom Ravensburger Verlag in Deutschland veröffentlicht. Der Entwurf von Freeling und die kommerzielle Version unterscheiden sich in einer Regel (s. Kapitel 1.3). Havannah ist ein 2-Personen-Spiel. Ziel des Spieles ist es durch geschicktes und taktisches Legen von Spielsteinen eine Formation aufzubauen. Um das Spiel zu gewinnen, müssen die Steine der eigenen Farbe einen ***Ring*** (engl.: ring, eine ***Brücke*** (engl: bridge oder eine ***Gabel*** (engl.: fork) bilden. Die Regeln werden im Kapitel 1.3 genauer erklärt. Um eine Verwechslung mit den in Kapitel 4 beschriebenen Verbindungsarten zu vermeiden werden die Siegbedingungen immer kursiv und fett geschrieben.

1.1 Motivation

Havannah ist ein weniger bekanntes Brettspiel. Es bietet eine gute Möglichkeit Lösungsstrategien zu untersuchen. Bei Havannah handelt es sich um ein Verbindungsspiel. Es hat eine starke Ähnlichkeit mit Hex [Bro00]. Die Verbindung ist ein Hauptziel des Spieles, ähnlich den Spielen Hex und TwixT . Die Regeln sind einfach, aber die Anzahl der Spielverläufe und -situationen sind sehr hoch.

Was macht die Stärke eines Computerprogrammes aus? Es ist die Möglichkeit viele Schritte im vorrauszuberechnen und eine Bewertung der Stellung durchzuführen. Es gibt sehr viele Möglichkeiten einen Spielstein zusetzen. Vorallem in der Anfangsphase des Spieles gibt es eine sehr hohe Anzahl von möglichen Zügen.

Eine Vorausberechnung von Zügen nimmt sehr viel Zeit in Anspruch. Somit liegt die Konzentration auf einer sehr guten Stellungsbewertung und einer daraus resultierenden Zugberechnung.

Was macht ein Mensch wenn er das Spiel spielt? Er denkt. Computer hingegen können nicht denken. Warum ist Havannah so leicht für den Menschen zu verstehen und so schwer für den Computer? Es gibt:

- materielle Ausgeglichenheit

- keine Bewegung von Steinen
- keine konkrete Richtung
- keine Eroberung
- keine Umwandlung von Spielsteinen
- keine illegalen Züge

Diese Punkte haben den Autor des Spieles dazu bewogen eine Challenge ins Leben zu rufen [Fre02]. In dieser behauptet er, dass es in den nächsten zehn Jahren kein Programm schafft, ihn in einem von insgesamt zehn Spielen zu schlagen.

Anhand des statischen Spielplanaufbaus läßt sich Havannah in ein Graphenmodell umwandeln. Die Umwandlung legt nahe, dass eine Strategie für Havannah auf einer Strategie in einem Graphen beruhen muss und somit die Lösung im Graphenmodell zu suchen ist.

Havannah vereinigt einige Merkmale bekannter anderer Spiele. Als der bekannteste Vertreter ist Hex zu nennen [Bro00]. Viele Strategien und Überlegungen, die für Hex gelten, gelten bei Havannah ebenso. Sie werden genauso betrachtet wie neue Strategien, die aufgrund der zusätzlichen Siegbedingungen entstehen.

1.2 Gliederung

Zu Beginn werden die Regeln kurz erklärt. In Kapitel 2 wird auf das hinter dem Spiel stehende Netzwerk eingegangen und grundlegende Begriffe des Netzwerkes und des Spieles anhand des Graphenmodelles erklärt. In den Folgenden Kapiteln werden die Strategien auf den Havannahbrett erklärt. In Kaptiel 4 auf die grundlegenden Verbindungsarten eingegangen. In Kapitel 5 werden wichtige Strategien und Taktiken des Spieles behandelt. Kapitel 6 zeigt einige interessante Spielsituationen und deren Analyse und mögliche Lösungen. Abschliessend ist in Kapitel 7 eine kurzer zusammenfassender Überblick zu sehen und mögliche zukünftige werden Schritte beleuchtet.

1.3 Spielregeln

Die Regeln für das Havannah-Spiel sind einfach. Es wird auf einem Sechseck gespielt mit einer Kantenlänge von 8 oder 10 Steinen. Abbildung 1.1 zeigt ein leeres Spielbrett mit einer Kantenlänge von 10 Steinen.

Auf dem Spielbrett gibt es drei verschiedene Arten von Felder. Als erstes gibt es die Ecksteine (s. Abbildung 1.2). Eine Belegung dieser Steine ist für die Siegbedingung ***Brücke*** nötig.

Dann gibt es die Randsteine (s. Abbildung 1.3). Eine Verbindung von drei verschiedenen Randsteinen, die nicht dem gleichen Rand angehören bilden die Siegbedingung ***Gabel***.

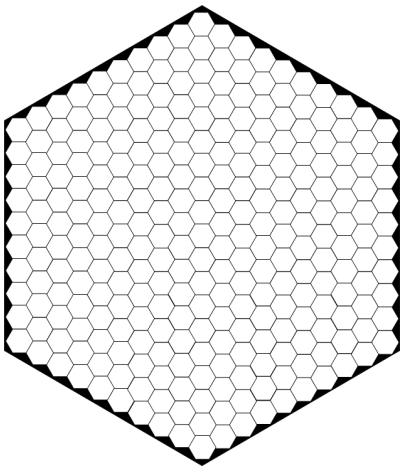

Abbildung 1.1: Havannah Spielfeld

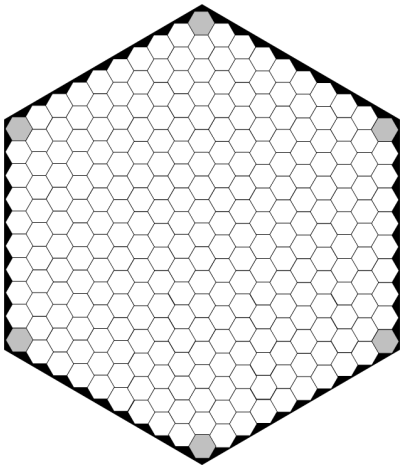

Abbildung 1.2: Havannah Spielfeld. Ecksteine sind markiert

Die übrigen Spielfelder haben keine weitere Bedeutung. Einige von ihnen sind Knotenpunkte. Sie werde in Kapitel 5.2 erklärt.

Havannah wird zu zweit gespielt. Am Anfang wird festgelegt welcher Spieler welche Farbe spielt. Danach beginnt der Startspieler, in der Regel ist dies der weiße Spieler, seinen ersten Zug. In seinem Zug muss der aktive Spieler einen Spielstein seiner Farbe auf ein freies Hexfeld des Spielbrettes legen. Damit ist dann sein Zug beendet und der Gegenspieler ist an der Reihe.

Das Spiel ist zuende wenn eine der Siegbedingungen erreicht wurde oder keiner der Spieler mehr einen Zug machen kann. Im letzten Fall würde das Spiel in einem Unentschieden enden. In Havannah gibt es drei verschiedene Siegbedingungen.

- ***Brücke***
- ***Gabel***

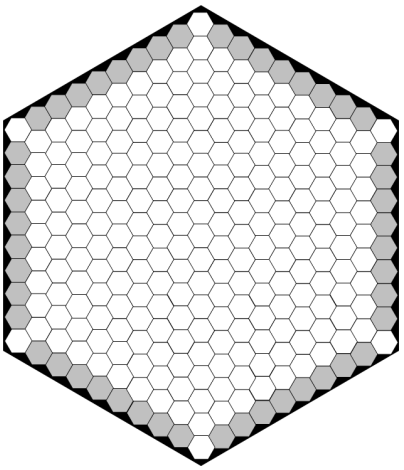

Abbildung 1.3: Havannah Spielfeld. Ecksteine sind markiert

- ***Ring***

Für die Siegbedingung ***Brücke*** muss eine Verbindung zwischen zwei Eckfeldern hergestellt werden. Abbildung 1.4 zeigt eine mögliche Verbindung zwischen zwei Ecksteinen.

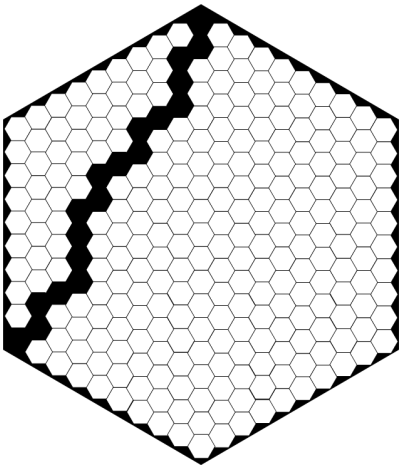

Abbildung 1.4: Brücke zwischen zwei Ecksteinen

Eine ***Gabel*** entsteht, wenn es eine Formation gibt, die drei verschiedene Ränder miteinander verbindet.(s. Abbildung 1.5). Die Formation muss eine geschlossene Kette zwischen den Randsteinen darstellen.

Im Gegensatz zu den anderen Möglichkeiten ein Spiel zu gewinnen, hat der ***Ring*** keinen festen Bezugspunkt. Ein ***Ring*** kann überall auf dem Spielfeld entstehen. Er entsteht wenn eine geschlossene Reihe von Steinen entsteht, die mindestens ein Feld einschließt, dass nicht zu dieser Reihe gehört. Es spielt dabei keine Rolle ob das eingeschlossene Feld leer oder mit einem Stein, egal welcher Farbe, belegt ist. In der Abbildung 1.6 ist eine Reihe von Steinen dargestellt, die einen Ring enthält.

Das Spiel hat gewonnen, wer zuerst eine der Siegbedingung mit seinen Steinen erreicht.

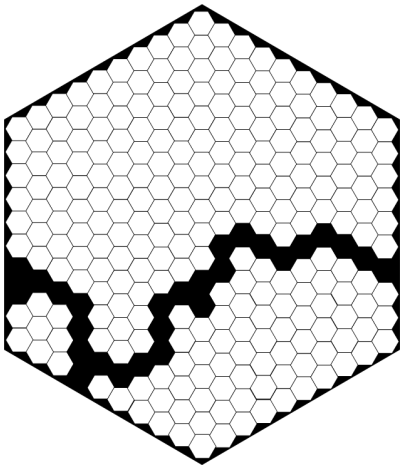

Abbildung 1.5: Verbindung zwischen drei verschiedenen Randfeldern

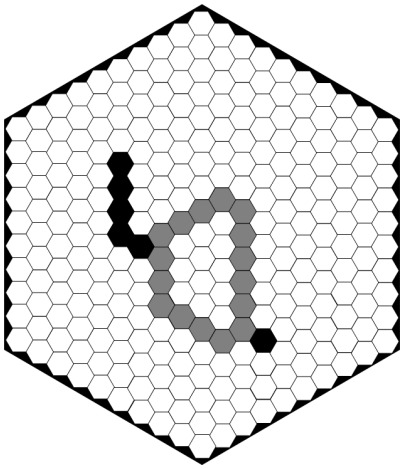

Abbildung 1.6: Reihe von Steinen, die einen Ring enthält (grau hervorbehoben)

Kapitel 2

Netzwerk

In der heutigen Zeit sind Netzwerke überall anzutreffen. Sogar in der Welt der Brettspiele trifft man auf sie. Verbindungsspiele, wie Havannah eines ist, lassen sich sehr gut in einen entsprechenden Graphen überführen. In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe erklärt und es wird auf Eigenschaften und Methoden eingegangen, die eine einfache und schnelle Verarbeitung ermöglichen.

2.1 Graphendefinition

Ein Graph ist wie folgt definiert:

Definition 2.1.1 (Graph) *Ein Graph besteht aus einer Menge V und einer in V definierten zwei-stelligen Relation E.* $G = \{V, E\}$ *mit* $E \subseteq V \times V$.

Ein Graph mit einer leeren Menge E bezeichnet man als leeren Graphen $G = O$.

Definition 2.1.2 (Knoten) *Ist* $G = \{V, E\}$ *ein Graph, dann nennt man V (engl.: vertex) einen Knoten von G.*

Definition 2.1.3 (Kante) *Ist* $G = \{V, E\}$ *ein Graph, dann nennt man E (engl.: edge) eine Kante von G.*

In Abbildung 2.1 ist ein Beispielgraph gezeigt und die Menge E und V angegeben.

Ein Knoten aus der Menge V wird mit v gekennzeichnet und ist definiert mit $v \in V$. Mit e wird eine Kante aus der Menge E bezeichnet $e \in E$. Um eine Menge von Knoten oder Kanten anzugeben, schreibt man eine geschweifte Klammer um die Knoten und Kanten. Eine Menge von Knoten lautet $\{v_1, v_2, ...\}$ und eine Menge von Kanten $\{e_1, e_2, ...\}$.

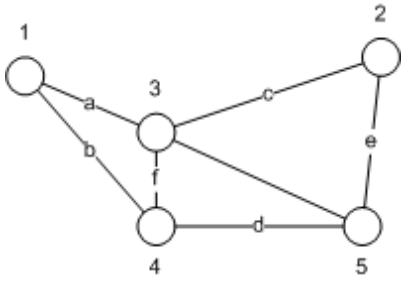

Abbildung 2.1: Beispielgraph G mit $V(G) = \{1, .., 5\}$ und der Kantenmenge $E(G) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$

2.2 Modellierung

Für die Modellierung des Havannah Spielbrettes in einen Graphen wird ein leerer Graph betrachtet. Jedes Spielfeld wird als Knoten in diesem Graphen dargestellt. Für jeden direkten Nachbarn auf dem Spielfeld wird im Graphen eine Kante mit den beiden entsprechenden Knoten erstellt. Jedes Spielfeld und somit jeder Knoten hat maximal sechs Nachbarn (drei Nachbarn bei Ecksteinen, vier Nachbarn bei Randsteinen). Abbildung 2.2 zeigt die Modellierung eines Ausschnittes des Spielbrettes durch einen Graphen.

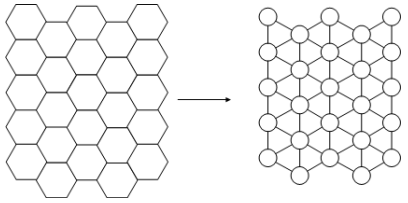

Abbildung 2.2: Überführung des Spielbrettes in ein Graphenmodell(Ausschnitt).

2.3 Nachbarschaft

In einem Graph sind zwei Knoten benachbart (engl.: adjacent), wenn sie über eine Kante miteinander verbunden sind. Die Nachbarschaft von zwei Knoten v_1 und v_2 wird durch $\overline{v_1 v_2}$ dargestellt. Eine Nachbarschaft hat keine Richtung. Damit beschreibt $\overline{v_2 v_1}$ die gleiche Kante. In einem ungerichteten Graphen G gilt:

Definition 2.3.1 (Nachbarschaft) $\overline{v_1 v_2} \leftrightarrow \{\exists e, e \in E \wedge e = \{v_1, v_2\}\}$.

Abbildung 2.3 zeigt eine einfache Nachbarschaft. Knoten 1 ist mit Knoten 4 benachbart, weil eine Kante existiert, die beide Knoten miteinander verbindet.

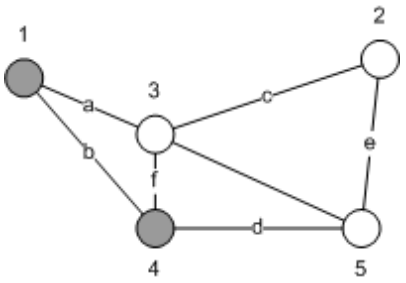

Abbildung 2.3: Knoten 1 und Knoten 4 sind benachbart: $\overline{14}$

2.4 Entfernung

Die Entfernung innerhalb eines Graphen zwischen zwei Knoten spielt nicht nur in Havannah eine große Rolle. In einem Graph werden bei vielen praktischen Anwendungen die Kanten oder Knoten bewertet. Solche ein Graph wird kanten- oder knotenbewertet genannt [Tur04].

Für die Berechnung der Entfernung in einem Graphen wird nur ein kantenbewerteter Graph betrachtet. Jede Kante bekommt einen Wert c aus einer Wertemenge W zugewiesen. Diese Menge W ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen $W \subseteq N$. Der Wert entspricht der Entfernung der beiden verbundenen Knoten dieser Kante. In Abbildung 2.4 ist ein kantenbewerteter Graph dargestellt.

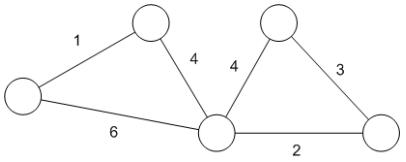

Abbildung 2.4: kantenbewerteter Graph

Für Havannah und viele andere Brettspiele auch, kann zur Vereinfachung die Entfernung einer Kante auf 1 gesetzt werden. Dies hat den Vorteil, dass die Berechnung beschleunigt wird, da nicht mehr der Wert der Kante bestimmt werden muss. Die Entfernung zwischen zwei Knoten ist somit die Anzahl der Kanten, die für eine Verbindung benötigt werden.

Die Entfernung von zwei Knoten ist 0, wenn sie beide mit der gleichen Farbe markiert sind. Auf dem Spielbrett entspricht das der Belegung von zwei benachbarten Felder mit Spielsteinen der gleichen Farbe. Durch die Reduzierung der Entfernung werden die Knoten als ein Ganzes angesehen. Alle Nachbarn von dem ersten Knoten sind auch gleichzeitig die Nachbarn des zweiten Knoten. Dieser Vorgang wird in Kapitel 2.6 näher erklärt.

2.5 Wege

Ein Weg w in einem Graph ist beschrieben durch eine Folge von Knoten $v_i \in V$ mit $0 \leq i \leq k-1$ wobei $k = |V|$ ist. Mit $s(w)$ wird der Startknoten und mit $e(w)$ der Endknoten bezeichnet [Die00].

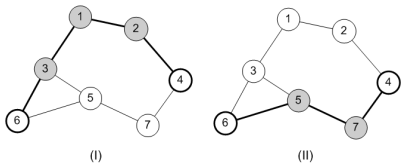

Abbildung 2.5: Beispielwege in einem Graph

In der Abbildung 2.5 sind für zwei Knoten in einem Graphen unterschiedliche Wege dargestellt. Abbildung 2.5(I) zeigt einen Weg w_1 mit $s(w) = 6$ und $e(w) = 4$. Die Knoten der Menge $\{3, 1, 2\}$ bilden die Verbindungsknoten. Einen anderen möglichen Weg zeigt die Abbildung 2.5(II). Dieser Weg verbindet ebenfalls die beiden Knoten 4 und 6. Die Menge der Verbindungsknoten ist $\{5, 7\}$. Die Vereinigung der Verbindungsknoten ist eine leere Menge: $\{3, 1, 2\} \wedge \{5, 7\} = \{\}$. Wege mit gleichem Start- und Endpunkt aber einer disjunkten Menge der Verbindungsknoten werden als alternative Wege bezeichnet.

Alternative Wege sind wichtig für die Sicherung einer Verbindung innerhalb eines Graphen. Im Kapitel 4 werden die Verbindungsarten vorgestellt. Viele von ihnen benötigen das Vorhandensein von alternativen Weg, um zwei Knoten sicher zu verbinden.

Ein Graph besitzt einen alternativen Weg, wenn er 2-fach zusammenhängend ist. Der Zusammenhang ist in [Die00] definiert. Für so einen Graph existiert ein Kreis, der über beide Zusammenhangskomponenten verläuft. Wenn nun eine dieser Zusammenhangskomponenten getrennt wird, so sind immer noch alle Knoten des Graphen miteinander verbunden. Auf dem Spielbrett würde die Verbindung durch einen Gegnerischen Spielstein blockiert.

2.6 Faltung

Die Größe eines Graphen ist häufig ein Problem wenn es darum geht schnelle Algorithmen zu entwickeln. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen und somit die Anzahl der Knoten und Kanten zu verringern ist die Faltung. Sie ist angelehnt an den Edmond-Algorithmus, der die Komplexität für das Matching von Graphen reduziert [FP97].

Unter der Faltung versteht man das Zusammenlegen von Knoten und Kanten. Ein Zusammenfassen von Knoten macht dann Sinn, wenn der Entfernungswert (s. Kapitel 2.4) der Kanten, die die Knoten miteinander verbinden 0 beträgt. Jeder Knoten innerhalb der betrachten Menge hat eine Entfernung von 0 zu jedem anderen Knoten. Dabei können noch Kanten existieren, die einen Wert $\neq 0$ besitzen. Diese werden aber nicht betrachtet.

Die Menge der Knoten bilden einen induzierten Teilgraphen. Dieser hat die Eigenschaft, dass die Länge der Wege zwischen allen Paaren von Knoten 0 ist. Dieser induzierte Teilgraph wird als induzierter Faltungsgraph bezeichnet. Dieser Graph ist definiert mit

> Wenn $H \subseteq G$ ist und für alle $v_1, v_2 \in V(H)$ ein Weg w existiert, mit $s(w) = v_1$, $e(w) = v_2$ und $|w| = 0$ dann ist H ein induzierter Faltungsgraph.

Um die Faltung abzuschliessen wird der induzierte Faltungsgraph entfernt $G_1 = G \backslash H$. An diese Stelle kommt ein neuer Knoten v: $G_1 = G_1 \vee v$. Der Knoten v bekommt Kantenverbindung zu Knoten des Graphen G_1. Für jede Kante $e = \{u_1, u_2\}$ mit $e \in E(G)$, $u_1 \in G$ und $u_2 \in H$ wird eine Kante f in den Graphen G_1 eingefügt $G_1 = G_1 \vee f$ mit $f = \{u_1, v\}$.

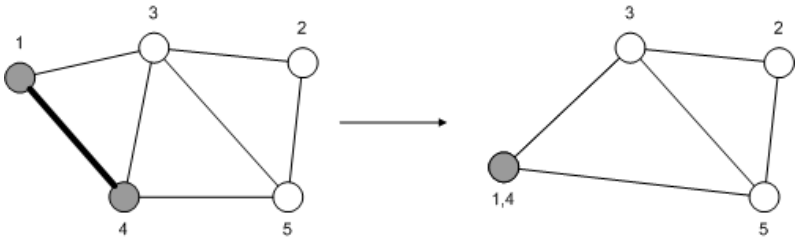

Abbildung 2.6: Faltung eines induzierten Teilgraph

Abbildung 2.6 zeigt die Faltung der Knoten 1 und 4. Die Kante die beide Knoten miteinander verbindet wird entfernt und alle Knoten, die über eine Kante mit Knoten 1 verbunden sind, werden nun mit Knoten 4 verbunden. Der zusammengelegte Knoten erhält die neue Bezeichnung Knoten 1,4.

Kapitel 3

Spielbrett

In diesem Kapitel wird kurz auf das Spielbrett eingegangen. Es wird das Koordinatensystem erklärt, die Nachbarschaft dargestellt und auf Entfernung zwischen Spielfeldern eingegangen.

3.1 Koordinatensystem

Für das Spielbrett gibt es zwei unterschiedliche Arten ein Koordinatensystem darzustellen. Zum Einen gibt es, ähnlich wie bei Hex, die Möglichkeit die Zahlen 1-19 und die Zeichen A-S jeweils auf der rechten und linken Seite des Spielbrettes zu markieren. Die Abbildung 3.1 zeigt so ein alphanumerisches Koordinatensystem. Die Vorteile dieser Schreibweise sind für Zuganalysen gegeben. Ein Punkt auf dem Spielbrett kann einfach durch Angabe von Buchstabe und Zahl genannt werden. Der Mittelpunkt hat zum Beispiel die Koordinaten J10.

Das andere Koordinatensystem benutzt ein eher drei dimensionales Bild des Spielbrettes. Für die Definition des Systems dient ein Würfel [Faa06]. Jeder Punkt des Würfels ist definiert durch ein Tripel von Koordinaten: x, y und z. Durch diesen Würfel wird eine Ebene gelegt, so dass diese Ebene die Mittelpunkte von sechs Kanten berührt. Das so entstehende Koordinatensystem ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der Vorteil dieses Koordinatensystem liegt im Freiheitsgrad. Für dieses System ist er zwei. Das heißt, das die dritte Koordinate immer berechnet werden kann. Der Zusammenhang zwischen x,y oder z ist:

$$x + y + z = 0$$

Der Definitionsbereich der Koordinaten ist abhängig von der Größe des Spielbrettes. Bei einer Kantenlänge des Spielbrettes von 10 Feldern ergibt sich ein offenes Intervall von $(-10, ..., 10)$. Allgemeine ausgedrückt ist der Definitionsbereich definiert durch:

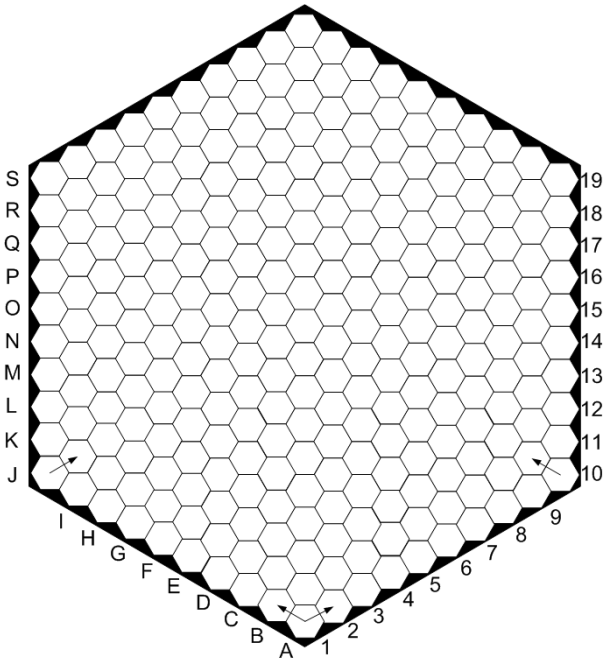

Abbildung 3.1: Standardkoordinatensystem

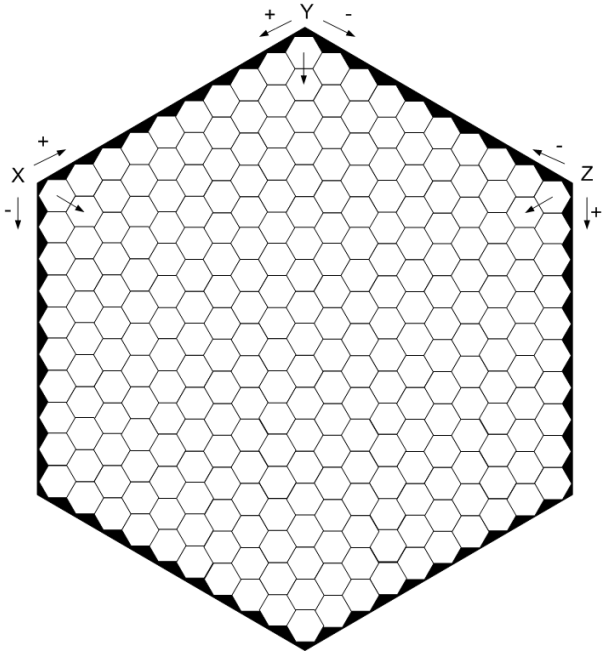

Abbildung 3.2: XYZ Koordinatensystem

Ist a die Kantenlänge so gilt
$x, y, z \in (-a, a)$
unter Einbehaltung von $x + y + z = 0$

Kapitel 3.2 zeigt einen weiteren Vorteil bei der Berechnung von Entfernungen. Für die interne Darstellung der Koordinaten genügt es zwei Variablen zu benutzen, da durch den Freiheitsgrad die dritte Koordinate immer berechnet werden kann. Durch die nicht bestimmt Richtung des Spieles, gibt es sechs unterschiedliche Sichtweisen für das Spielbrett. Für die Anwendung von Mustern (s. Kapitel 5.5) ist es sehr umständlich für jede der möglichen Drehungen des Spielbrettes eine eigene Struktur abzuspeichern. Mit Hilfe der einzelnen Koordinaten und der Anwendung der Permutation ist es möglich durch das Wissen eines Spielfeldes alle anderen fünf zu berechnen [Sti99]. Es gibt drei Koordinaten x,y und z. Durch die Permutation entstehen die sechs möglichen Kombinationen. Jeder dieser Kombinationen entspricht dem gleichen Feld nur jeweils auf einem um 60° gedrehten Spielbrett. Für die Koordinaten ergibt sich somit folgende sechs Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Mit der anderen Darstellung der Koordinaten ist eine Drehnung des Spielbrettes nur sehr schwer möglich. Für eine Erkennung aller sechs Möglichkeit eines Spielfeld wäre eine Assoziationstabelle nötig, die für jede Koordinate, die entsprechenden fünf anderen Möglichkeit beinhaltet.

Die Tabelle 3.1 zeigt den Speicherbedarf und die Komplexität beider Darstellungen bei der Suche nach den Koordinaten für jede Drehung. Mit n ist die Anzahl der Knoten gemeint. Die Anzahl berechnet sich mit Hilfe der Kantenlänge. Für eine Kantenlänge von k ergibt sich die Anzahl n aus $n = 3 * k^2 - 3 * k + 1$. Für die Standard Kantenlängen von $k = 8$ und $k = 10$ ergibt sich somit eine Knotenanzahl von 169 bzw. 271 Knoten.

Koordinatensystem	benötigter Speicher	Komplexität für Suche
alphanumerisch(I)	n	O(n/2)
alphanumerisch(II)	6*n	O(ld n)
xyz	c	O(c)

Tabelle 3.1: Komplexitäts- und Speichervergleich von zwei Koordinatendarstellungen

Die in der Tabelle 3.1 aufgeführten alphanumerischen Koordinatensystem unterscheiden sich in ihrer Speicherung der einzelnen zusammenhängenden Feldern. Für die Suche wird ein Index auf dem ersten Element der Zuordnung angenommen.

Das Koordinatensystem alphanumerisch(I) speichert die zusammenhängenden Felder in ihrer Beziehung ab. Damit ist der Speicherbedarf gleich der Anzahl der Felder. Für die Suche muss jedoch im schlechtesten Fall alle 6'er Paare durchlaufen werden. Bei alphanumerisch(II) wird für jedes Spielfeld eine Array angelegt. In diesem Array befinden sich

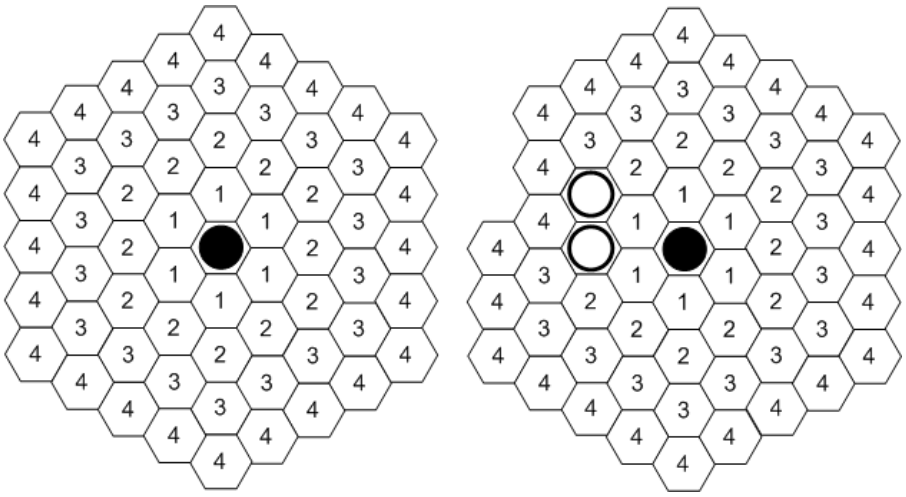

Abbildung 3.3: Entfernungen auf dem Spielbrett

alle Bezeichnungen von Feldern, die bei einer Drehung den gleichen Punkt symbolisieren. Diese Art der Speicherung erzeugt eine hohe Menge an redundanten Daten. Im Gegenzug wird die Suche beschleunigt, da nun nicht mehr jedes Array abgearbeitet werden muss. Die gesuchte Bezeichnung des Spielfeldes befindet sich im Index. Für das XYZ-Koordinatensystem ändern sich die Werte sehr stark. Eine Speicherung der gedrehten Felder ist nicht nötig, da wie bereits beschrieben, die Felder anhand der Permutation berechnet werden können. Somit ergibt sich ein konstanter Wert für die Berechnung der Permutation und für die Suche.

3.2 Entfernungen

Die Entfernung auf dem Spielbrett gibt die Anzahl der Spielzüge an, die für eine komplette Verbindung von zwei Spielfeldern benötigt werden. Zur Berechnung der Entfernung auf einem leeren Spielbrett kann das XYZ-Koordinatensystem verwendet werden. Die Entfernung ist die halbierte Summe der betraglosen Differenzen der Koordinaten. In einer Formel ausgedrückt:

> Die Entfernung d von zwei Punkten $p_1 = (x_1, y_1, z1)$ und $p_2 = (x_2, y_2, z2)$ ergibt sich aus
>
> $d = (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|)\,/2$

Abbildung 3.3 zeigt Ausschnitte eines Spielbrettes. Für einen gesetzten schwarzen Spielstein sind die Entfernungen abgebildet. Auf der linken Seite der Abbildung sieht man die Entfernung ohne den Einfluss von weißen Spielsteinen. Während auf der rechten Seite eine klare Veränderung im Bereich der gegnerischen Stein zu erkennen ist.

3.3 Nachbarschaft

Ein direkt angrenzendes Spielfeld wird als Nachbar bezeichnet. Die Nachbarschaft ist neben der Brücke (Kapitel 4.1) die wichtigste Verbindung auf dem Spielbrett. Sie garantiert eine sichere Verbindung zwischen benachbarten Steinen.

Im XYZ-Koordinatensystem läßt sich die Nachbarschaft einfach durch die Entfernung berechnen. Zwei Felder sind benachbart, wenn die Entfernung zwischen ihnen 1 ist:

Gegeben seien die Punkte p_1 mit (x_1, y_1, z_1) und p_2 mit (x_2, y_2, z_2)

$\Delta n = (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|)\,/2$

p_1 und p_2 sind benachbart

genau dann wenn $n = 1$.

Kapitel 4

Verbindungen

Die Verbindung innerhalb des Spielfeldes hat eine wichtige Rolle im Spiel. Dieses Kapitel gibt die Grundlagen für eine sichere Verbindung zwischen den Spielsteinen wieder. Zwei Steine oder Ketten (s. Kapitel 4.2) sind verbunden, wenn zwischen ihnen eine sichere Verbindung hergestellt werden kann. Die Nomenklatur für die Verbindung ist *n-connected*. Dabei steht n für Zusammenhangswert. Es bezeichnet die Anzahl der Spielzüge, die benötigt werden um eine sichere Verbindung herzustellen. Eine Verbindung ist sicher wenn $n = 0$. Die direkte Nachbarschaft zwischen zwei Steinen ist die einfachste sichere Verbindung. Sie ist *0-connected* und spielt eine große Rolle in Ketten 4.2.

Einzelne Steine und Ketten werden mit fettgedruckten und kursiven Kleinbuchstaben bezeichnet ***a..z***. Eine Menge wird mit einem runden Klammernpaar **(*a, b, ...*)** zusammgenfasst. Zur Vereinfachung schreibt man ***C***. Bei Verbindungen über alternativen Wegen entstehen Bereiche, wo noch kein Spielstein gespielt wurde. Diese Menge wird als freie Punktemenge bezeichnet. Punkte aus dieser Menge werden mit kursiven Kleinbuchstaben *p..z* bezeichnet. Die Menge wird durch eine geschweifte Klammer dargestellt $\{p,q,...\}$ Zusammengefasst schreibt man für diese Menge *S*.

Für die Beschreibung in diesem Kapitel wird für die Grafiken folgende Definition festgelegt:

- weiße Felder sind kein Teil einer Gruppe
- graue Felder sind Teile einer Gruppe, Stufe oder Pfad
- Felder mit einem kleinen Punkt sind Pivot- oder Angriffspunkte innerhalb der freien Punktmenge

In Abbildung 4.1 sind die unterschiedlichen Felder dargestellt.

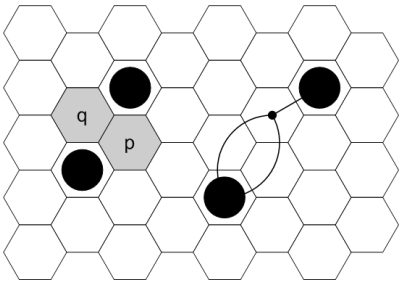

Abbildung 4.1: Legende: weiße Feld gehören keiner Verbindung an; graue Feld sind Teile von Gruppen, Stufen oder Pfaden; Feld mit einem kleinen Punkt sind Pivot- oder Angriffspunkte.

4.1 Brücke

Eine Brücke ist neben der direkten Nachbarschaft von zwei Spielsteinen die einfachste Methode eine sichere Verbindung zu erstellen. Sie ist 0-connected. In Kapitel 5.1 wird gezeigt, wie mittels Brücken sichere Verbindungen über größere Entfernungen aufgebaut werden können. Bei der Brücke sind die beiden Spielsteine nicht benachbart. In [ST75] wird diese Struktur auch als „Two Way Stretch“ bezeichnet.

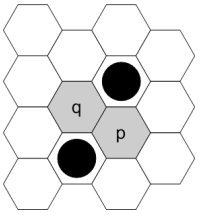

Abbildung 4.2: Brücken-Verbindung zwischen zwei schwarzen Spielsteinen.

Abbildung 4.2 zeigt eine Brücke zwischen zwei schwarzen Spielsteinen. Sie verläuft über die beiden freien Spielfelder, die mit p und q gekennzeichnet sind. Es spielt bei einer Brücke keine Rolle, welcher Spieler als nächstes am Zug ist. Durch den alternativen Weg, den diese Struktur bildet, gelingt es dem schwarzen Spieler immer eine Verbindung zwischen diesen beiden Spielsteinen zu erstellen. Um eine Brücke aufzubrechen, muss mindestens einer der freien Punkte p oder q in eine Bedrohung eingeschlossen werden.

4.2 Kette

Eine wichtige Verbindung ist die Kette. Erst durch eine Kette kann das Spiel beendet werden. Das ist der Fall, wenn durch sie eine der Siegbedingungen erfüllt ist.

Ketten entstehen durch das direkte Anlegen von Spielsteinen an bereits vorhandenen auf dem Spielbrett. Die Struktur der Kette erlaubt es eine sichere Verbindung zwischen zwei Punkten des Spielbrettes aufzubauen. Die aufgebaute Verbindung kann nicht mehr unterbrochen werden. Eine Kette ist eine kumulative Verbindung und 0-connected. Die kleinste Kette ist ein einzelner Stein.

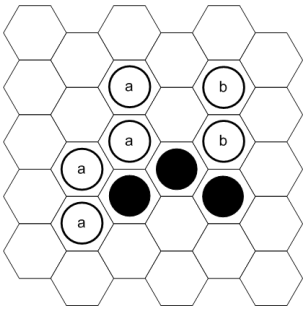

Abbildung 4.3: Ketten (a,b)

Das Zusammenfassen von Ketten entspricht dem Falten des Graphen. Zusammenhängende Knoten, die durch eine Nachbarschaft verbunden sind, werden als ein Ganzes angesehen. Die Nachbarn jedes einzelnen Feldes dieser Kette ist somit auch Nachbar der Kette. Der Vorteil durch diesen Verbund ist die sinkende Komplexität des Graphen. Dies hat Auswirkung auf die Geschwindigkeit der angewendeten Algorithmen. Zwei Beispielketten sind in Abbildung 4.3 zu sehen.

Ketten die einen Randstein oder einen Eckstein umfassen, werden Randketten oder Eckketten genannt. Um diese Ketten hervorzuheben werden sie mit einem Δ für Randketten und einen Γ für Eckketten ergänzt.

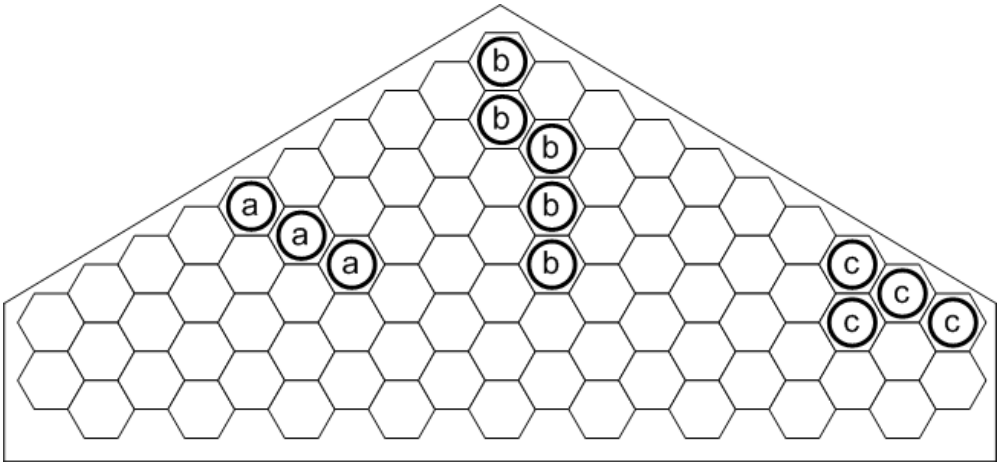

Abbildung 4.4: Typen von Ketten

Abbildung 4.4 zeigt drei unterschiedliche Arten von Ketten. Kette $\Delta \boldsymbol{a}$ ist eine normale Randkette. Bei der Kette $\Gamma \boldsymbol{b}$ handelt es sich um eine Eckkette. Eine Kombination von beiden Typen ist auch möglich. Dies veranschaulicht Kette $\Gamma\Delta \boldsymbol{c}$.

4.3 Gruppe

Eine Gruppe besteht aus einer Menge von Ketten, die untereinander eine Verbindung haben und einer freien Punktmenge. Diese freie Punktmenge entsteht durch die Verbindungen innerhalb der Gruppe. Eine Gruppe bildet, neben der Kette, die sicherste Verbindung zwischen verschiedenen Bereichen des Spielbrettes.

Die allgemeine Schreibweise für eine Gruppe ist

$$n - group\,(C\,\{S\})$$

Der Wert n gibt den Zusammenhang der Gruppe an. C steht für die Menge der beteiligten Ketten und S für die freie Punktmenge.

Eine Gruppe ist sicher, wenn alle Verbindungen der Ketten innerhalb der Gruppe sicher sind (0-connected). So eine Gruppe wird bezeichnet mit $< C\,\{S\} >$. Die einfachste Gruppe beinhaltet nur eine einzige Kette. Sie wird auch als Singletongruppe bezeichnet. Die freie Punktmenge ist somit null. Vereinfacht wird diese Form als $< C >$ bezeichnet. Eine Gruppe, die keine Singletongruppe ist, verfügt immer über eine freie Punktmenge, sonst würden die Ketten zu einer einzige Kette zusammenfallen und eine Singletongruppe ergeben. Für die weitere Betrachtunge sind nur diese sicheren Gruppen von Interesse.

Wenn eine Gruppe eine Kette beinhaltet, die einen Randstein enthält, so wird sie als Randgruppe bezeichnet. Gekennzeichnet wird sie durch ein großes Delta im Ausdruck. Eine Randgruppe wird mit $\Delta < C\,\{S\} >$ bezeichnet. Randgruppen mit einer Verbindung zum gleichen Rand können zusammen gefasst werden.

$$\Delta < C_1\,\{S_1\} > \vee \Delta < C_2\,\{S_2\} >= \Delta < C_3\,\{S_3\} >$$

mit

$$C_3 = C_1 \vee C_2$$

$$S_3 = S_1 \vee S_2$$

Die Kombination der Gruppen ist jedoch nur für Wegberechnungen zur Rändern und Ecken möglich. Zur Überprüfung von Ringen bringt die Kombination von Randgruppe einen Fehler mit sich. Durch die Zusammenführung der Gruppen kann es zu einer angenommen Verbindung kommen. die zusammengefassten Gruppen verfügen über keine sichere Verbindung und können somit zu Fehlinterpretation von Ringen führen.

Gruppen, die eine Eckkette enthalten, werden els Eckgruppe bezeichnet. Ein vorangestelltes Γ dient zur Kennzeichnung dieser Gruppe. Wie auch bei Randgruppen können Eckgruppen zusammengefasst werden. Eine Kombination aus beiden Gruppentypen ist ebenfalls möglich. Die einzelnen Bezeichnungen werden dann zusammen der Gruppe vorangestellt.

Eine einfache Gruppe $< \boldsymbol{C}\{S\} >$ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Die Gruppe besteht aus den beiden Ketten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, sowie der freien Punktmenge p,q. Deutlich zu erkennen ist die Brückenverbindung (s. Kapitel 4.1) zwischen den beiden Ketten. Die dargestellte Gruppe verfügt dadurch über eine sichere Verbindung.

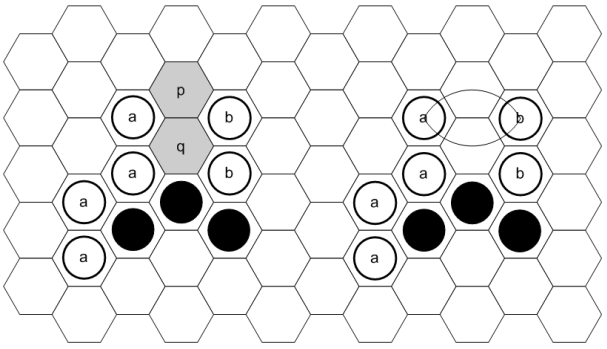

Abbildung 4.5: Gruppe mit den Ketten (***a,b***) sowie der freien Punktmenge *p,q*

4.4 Stufe

Eine Kette verfügt über die gleiche sichere Verbindung wie ein einzelner Stein. Eine Gruppe ist ebenfalls eine sichere Struktur und sie bietet darüber hinaus die Möglichkeit Verbindungen über das Spielbrett zu legen. Egal ob eine Kette oder eine Gruppe, beide Strukturen basieren auf Stufen.

Eine Stufe wird wie folgt geschrieben

$$n - step\,(\,<C\,\{S_1\}\,>p\,\{S_2\})$$

Der Wert n gibt den Zusammenhang der Stufe an. Mit $<C\,\{S_1\}>$ wird die Gruppe angegeben, von der aus die Stufe verläuft. Zu welchen Spielfeld die Stufe verläuft wird mit p gekennzeichnet. Dieser Punkt wird auch Terminal-Punkt oder Pivot-Punkt genannt. Pivot-Punkte werde unterstrichen dargestellt und bedürfen im späteren Verlauf einer genaueren Betrachtung. Die dadurch entstehende freie Punktmenge der Stufe entspricht $\{S_1\}$.

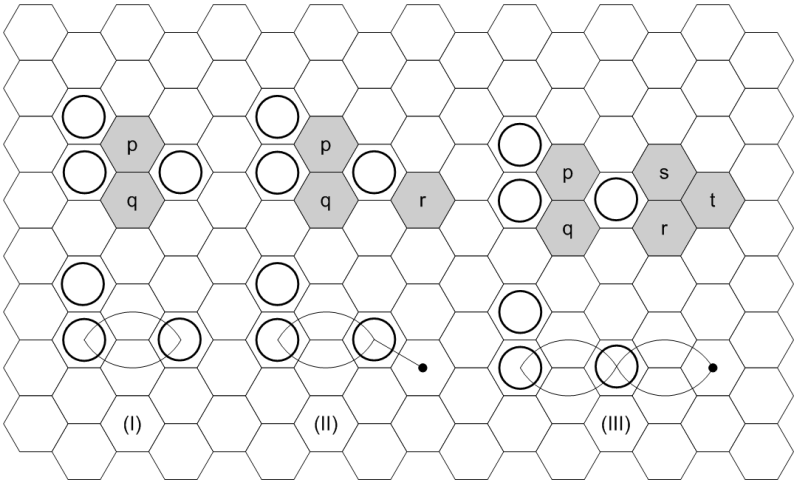

Abbildung 4.6: Gruppe, angrenzende Stufe und Brückenstufe

Abbildung 4.6(I) zeigt eine einfach Gruppe. Davon ausgehend wird eine angrenzende Stufe gezeigt (s. Abbildung 4.6(II)). Diese kurze Stufe ermöglicht eine Vergrößerung der

Gruppe ohne ihre Sicherheit zu gefährden. Die Stufe hat die Bezeichnung $1-step\,\{< a\ b\,\{p\ q\} > \underline{r}\}$. Der Pivot-Punkt für diese Stufe ist $\underline{r}$. Eine Brückenstufe ist in Abbildung 4.6(III) zu sehen. Die Bezeichnung für die Brückenstufe ist $1 - step\,\{< a, b\,\{p, q\} > \underline{t}\,\{r, s\}\}$. Klar zu erkennen ist in beiden Stufen der Pivot-Punkt. Dieser Punkt ist von Interesse wenn es darum geht diese Stufe zu verhindern.

Stufen können auch vereinigt werden. Dies ist dann möglich, wenn von der selben Gruppe $< C\,\{S_1\} >$ ausgehend, zwei Stufen mit dem Zusammenhangswert 2 existieren und diese über den gleichen Pivot-Punkt verfügen. Auch muss die Vereinigung der freien Punktmengen die leere Menge sein. Das Zeichen für die Vereinung von Stufen ist $\otimes$.

$$2 - step_1\,(< C\,\{S_1\} > p\,\{S_2\}) \otimes 2 - step_2\,(< C\,\{S_1\} > p\,\{S_3\})$$
$$\Rightarrow 1 - step_1\,(< C\,\{S_1\} > p\,\{S_4\})$$
genau dann wenn $\{S_1\} \wedge \{S_2\} \wedge \{S_3\} = \{\}$ ist.

Die neue freie Punktmenge ergibt sich durch $\{S_4\} = \{S_2\} \vee \{S_3\}$. Der Zusammenhangswert der neuen Stufe ist um eins geringer als der Wert der Original-Stufen. Diese Verringerung entsteht, durch die Verbindung mit einem alternativen Weg.

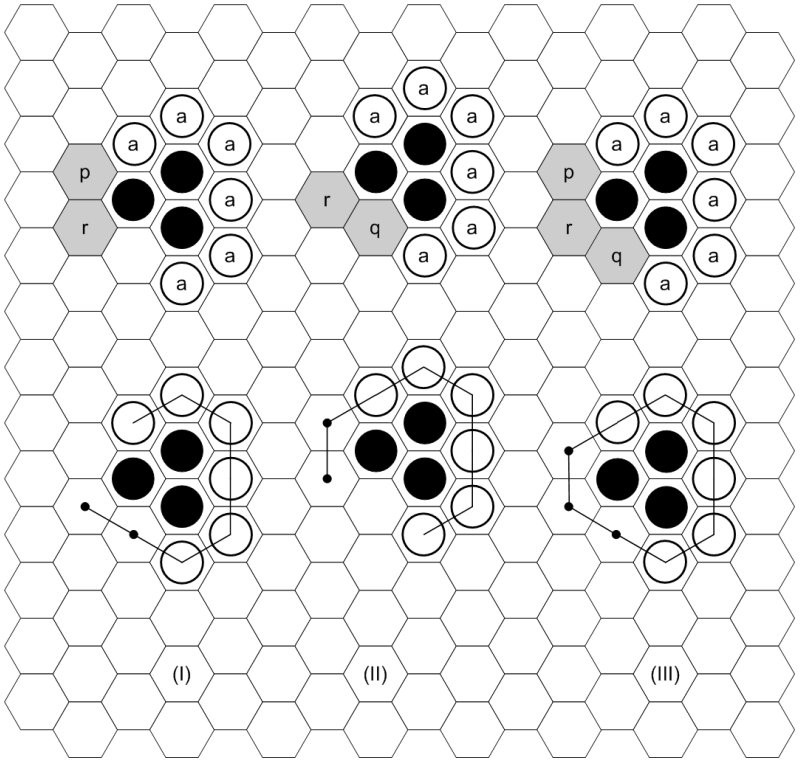

Abbildung 4.7: Erweiterung von 2 Stufen der Form 2-step in eine 1-step.

In der Abbildung 4.7 ist die Stufervereinigung an einem Beispiel gezeigt. Im ersten und zweiten Teil ist jeweils eine Stufe (2-Step) abgebildet. Beide bieten eine Möglichkeit den gemeinsamen Punkt r zu erreichen. Da die freien Punktmengen eine disjunkte Vereinigung darstellen, kann man beide Stufen mit dem Zusammenhangswert 2 zu einer einzigen Stufe mit dem Wert 1 verbinden.

$$2 - step\left\{< a > \underline{r}\left\{\underline{p}\right\}\right\}$$
$$\otimes 2 - step\left\{< a > \underline{r}\left\{\underline{q}\right\}\right\}$$
$$\Rightarrow 1 - step\left\{< a > \underline{r}\left\{\underline{q}, \underline{q}\right\}\right\}$$

In [Bro00] beschreibt Cameron Browne die Vereinigung von Stufen mit dem Zusammenhangswert von 1 als gegenstandslos. Für die Betrachtung für Havannah sind sie sehr interessant. Durch die Vereinigung von zwei Stufen mit der gleichen Ausgangsgruppe entsteht ein interessanter Pivot-Punkt. Spätestens wenn man die Möglichkeit sieht die entsteht, wenn man durch die Vereinigung von zwei Stufen mit der gleichen Ausgangsgruppe einen Ring bilden kann. In Kapitel 4.6 wird auf diese Möglichkeit eingegangen.

Im Gegensatz zur Stufenvereinigung wo die neue Stufe einen stärkeren Zusammenhang hat als die Ausgangsstufe, wird bei der Stufen-Erweiterung dieser Wert etwas abgeschwächt. Von einer Stufen-Erweiterung spricht man, wenn die zweite Stufe als Ausgangsgruppe den Pivot-Punkt der ersten Stufe besitzt und ihre beiden freien Punktmengen disjunkt sind. Das Symbol für die Stufenerweiterung ist $\oplus$.

$$n_1 - step_1\left(< C\left\{S_1\right\} > \underline{p}\left\{S_2\right\}\right) \oplus n_2 - step_2\left(\underline{p},\ \underline{q}\left\{S_3\right\}\right)$$
$$\Rightarrow n_3 - step_1\left(< C\left\{S_1\right\} > \underline{q}\left\{S_4\right\}\right)$$
$$\text{genau dann wenn } \left\{S_1\right\} \wedge \left\{S_2\right\} \wedge \left\{S_3\right\} = \{\}$$

Der Zusammenhangswert n_3 ergibt sich aus $n_3 = n_1 + n_2$ Die neue freie Punktmenge ergibt sich durch $\left\{S_4\right\} = \left\{S_2\right\} \vee \left\{S_3\right\} \vee \underline{p}$.

Der Pivot-Punkt p der ersten Stufe wird zur freien Punktmenge der erweiteren Stufe hinzugefügt. Der Status als Pivot-Punkt bleibt aber behalten. Er stellt einen wichtigen strukturellen Punkt dar, die Verbindung sicher zu machen. Auf der anderen Seite bietet er einen Angriffspunkt, um diese Verbindung zu verhindern.

Die Abbildung 4.8 zeigt eine Stufenerweiterung. Der Ausdruck für diese Erweiterung ist:

$$1 - step\left\{< a > \underline{r}\left\{p, q\right\}\right\} \oplus 1 - step\left\{\underline{r}\ \underline{u}\left\{s, t\right\}\right\}$$
$$\Rightarrow 2 - step\left\{< a > \underline{u}\left\{p, q, \underline{r}, s, t\right\}\right\}$$

4.5 Pfad

Wenn eine Verbindung zwischen zwei disjunkten Gruppen existiert, dann besteht ein Pfad zwischen diesen beiden Gruppen. Ein Pfad wird beschrieben durch eine Start- und eine Zielgruppe, einer Menge von Ketten und freien Punkten. Die beiden abschließenden Gruppen werden als Abschlussgruppen bezeichnet.

$$n - path\left(< C_1\left\{S_1\right\} >< C_2\left\{S_2\right\} > C_3\left\{S_3\right\}\right)$$

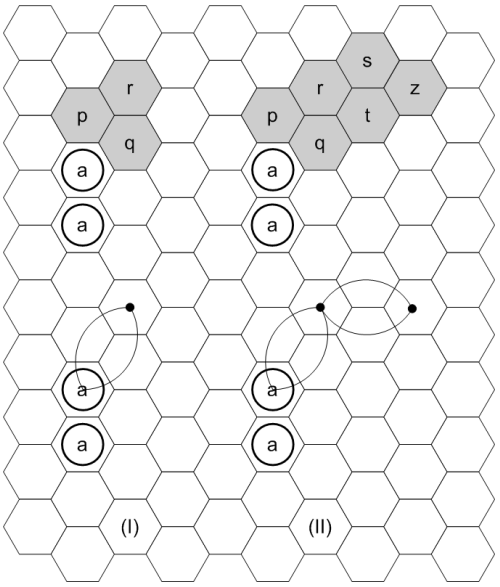

Abbildung 4.8: Stufenerweiterung von 1-step zu 2-step

Die Gruppen $< C_1 \{S_1\} >$ und $< C_2 \{S_2\} >$ sind die beiden disjunkten sicheren Abschlussgruppen. Durch C_3 werden die Ketten bezeichnet, die zwischen den Gruppen liegen und an denen entlang der Pfad verläuft. Die freie Punktmenge ist S_3. Mit n wird der Zusammenhangswert des Pfades bezeichnet. Für $n = 0$ wird der Pfad auch Nullpfad bezeichnet. Folgende Bedingungen gelten für einen Pfad:

$$C_3 \wedge (C_1 \vee C_2) = \{\}$$

und

$$\{S_3\} \wedge (\{S_1\} \vee \{S_2\}) = \{\}$$

Die Zwischenketten müssen zusammen mit den Ketten der sicheren Gruppe eine disjunkte Menge bilden. Das gleiche gilt für die freie Punktmenge. Wenn es bei der Punktmenge zu einer Überlagerung mit der freien Punktmenge einer anderen Gruppe des Pfades kommt, entsteht ein Angriffspunkt. Dieser Punkt bildet dann eine Möglichkeit entweder die Gruppe oder den Pfad, der diese Überlappung erzeugt, zu stören.

Abbildung 4.9 zeigt einen Pfad. Er führt von der Kette ***a*** zur Kette ***d***. Die Zwischenketten werden gebildet von ***b*** und ***c***. Die freie Punktmenge enthält zwei Pivot-Punkte und lautet $\{p, q, \underline{r}, s, t, u, v, \underline{w}\}$. Der Zusammenhangswert ergibt sich aus der Anzahl der Pivot-Punkte. Der gesamte Ausdruck für den abgebildeten Pfad lautet:

$$2 - path \{< a >< d > cd \{p, q, \underline{r}, s, t, z, v, \underline{w}\}\}$$

Wie auch bei Stufen besteht die Möglichkeit einen Pfad zu erweitern. Diese Erweiterung geht, wie auch schon bei den Stufen, auf Kosten des Zusammenhangwertes.

Zwei Pfade erweitern sich gegenseitig sobald ein Pfad existiert von der Gruppe $< C_1 \{S_1\} >$ zu Gruppe $< C_2 \{S_2\} >$ und ein weiterer Pfad von Gruppe $< C_2 \{S_2\} >$ zur Gruppe $< C_3 \{S_3\} >$. Die Pfade können nur erweitert werden, wenn alle Menge von Ketten und freien Punkte disjunkt sind. Das Symbol für die Pfaderweiterung ist $\oplus$.

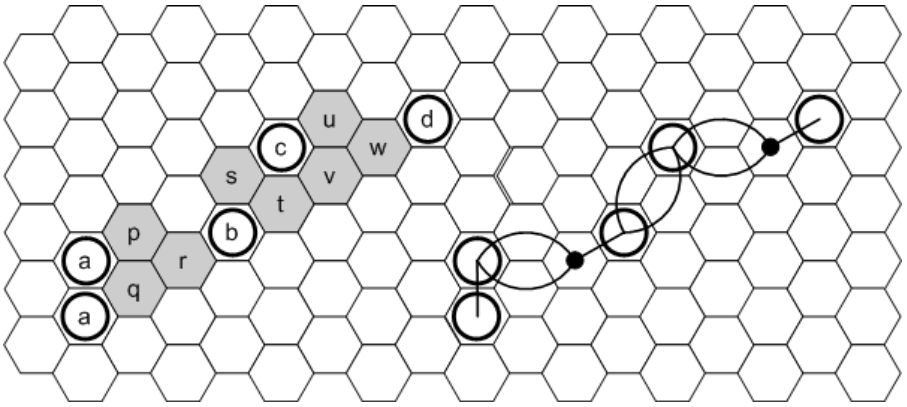

Abbildung 4.9: Pfad

$$n_1 - path\,\{< C_1\,\{S_1\} >< C_1\,\{S_1\} > C_4\,\{S_4\}\}$$
$$\oplus n_2 - path\,\{< C_2\,\{S_2\} >< C_3\,\{S_3\} > C_5\,\{S_5\}\}$$
$$\Rightarrow n_3 - path\,\{< C_1\,\{S_1\} >< C_3\,\{S_3\} > C_6\,\{S_6\}\}$$

genau dann wenn

$$\{S_1\} \wedge \{S_2\} \wedge \{S_3\} \wedge \{S_4\} \wedge \{S_5\} = \{\}$$

und

$$\{C_1\} \wedge \{C_2\} \wedge \{C_3\} \wedge \{C_4\} \wedge \{C_5\} = \{\}$$

Der neue Zusammenhangswert n_3 ergibt sich aus der Summe der Werte der Einzelpfade $n_3 = n_1 + n_2$. Die freie Punktmenge ist die Vereinigung der freien Punkte beider Pfade und der Verbindungsgruppe, die beide gemeinsam haben $\{S_6\} = \{S_2\} \vee \{S_3\} \vee \{S_5\}$.

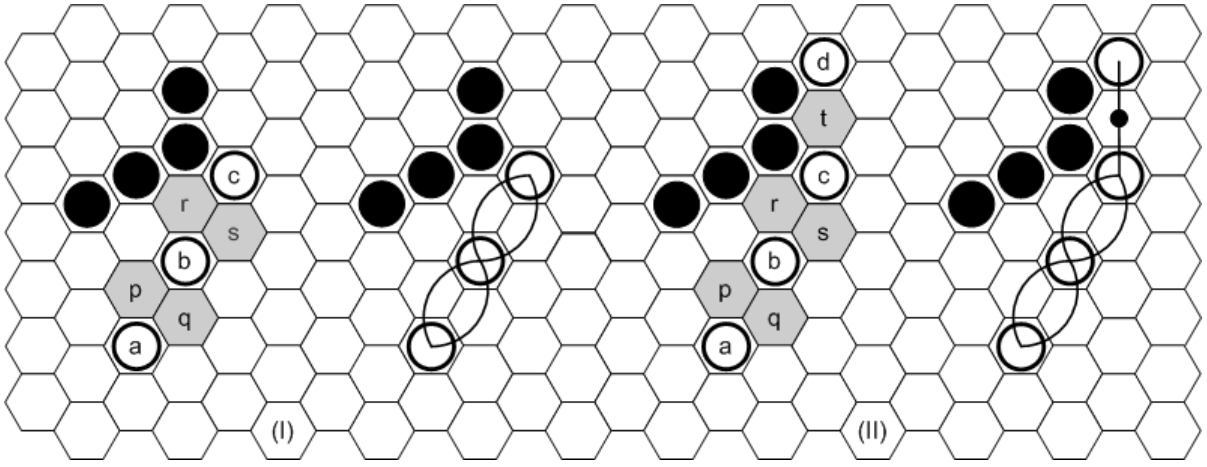

Abbildung 4.10: Pfaderweiterung

Die Abbildung 4.10 zeigt eine einfache Pfaderweiterung. Ein Pfad mit einer Brücke als Verbindung ist in Abbildung 4.10(I) abgebildet. Der Ausdruck für diesen Pfad ist:

$$0 - path\,\{< a >< c >< b > \{p, q, r, s\}\}$$

Dieser Pfad wird nun mit einer neuen Ketten und zusätzlichen freien Punkten erweitert:

$$0 - path\{< a >< c >< b > \{p, q, r, s\}\} \oplus 1 - path\{< c >< d > \{\underline{t}\}\}$$
$$\Rightarrow 1 - path\{< a >< d >< b >< c > \{p, q, r, s, \underline{t}\}\}$$

Für Pfade mit einem Zusammenhangswert von 1, deren Abschlussgruppen $< C_1\{S_1\} >$ und $< C_2\{S_2\} >$ gleich und die Mengen der Zwischenketten und freien Punkkten disjunkt sind, besteht die Möglichkeit der Pfadvereinigung. Das Symbol für die Pfadvereinigung ist $\otimes$.

$$1 - path\{< C_1\{S_1\} >< C_2\{S_2\} > C_3\{S_3\}\}$$
$$\otimes 1 - path\{< C_1\{S_1\} >< C_2\{S_2\} > C_4\{S_4\}\}$$
$$\Rightarrow 0 - path\{< C_1\{S_1\} >< C_2\{S_2\} > C_5\{S_5\}\}$$

genau dann wenn

$$\{S_1\} \wedge \{S_2\} \wedge \{S_3\} \wedge \{S_4\} = \{\}$$

und

$$\{C_1\} \wedge \{C_2\} \wedge \{C_3\} \wedge \{C_4\} = \{\}$$

Die neue Menge der Zwischenketten wird gebildet aus der Vereinigung der Menge beider Pfade $\{C_5\} = \{C_3\} \vee \{C_4\}$. Das gleiche gilt für die Menge der freien Punkte $\{S_5\} = \{S_3\} \vee \{S_4\}$.

Ein Beispiel für eine interessante Pfadvereinigung zeigt die Abbildung 4.11. Zwischen den beiden Gruppen $< a >$ und $< b >$ existieren zwei Pfade. Beide besitzen einen Zusammenhangswert von 1. Für den Pfad in Abbildung 4.11(I) lautet der Ausdruck:

$$1 - path\{< a >< b > c\{\underline{u}, v, w\}\}.$$

Der Pfad aus Abbildung 4.11(II) lautet:

$$1 - path\{< a >< b > \{p, q, \underline{r}, s, t\}\}.$$

Die Vereinigung beider Pfade (s. Abbildung 4.11(III)) ergibt einen 0-path:

$$1 - path\{< a >< b > c\{\underline{u}, v, w\}\} \otimes 1 - path\{< a >< b > \{p, q, \underline{r}, s, t\}\}.$$
$$\Rightarrow 0 - path\{< a >< b > c\{p, q, \underline{r}, s, t, \underline{u}, v, w\}\}.$$

Für Pfade mit einem Zusammenhangswert von 2 und mehr ist die Pfaderweiterung nicht korrekt und führt zu augenscheinlich sicheren Pfade. Mit der Pfaderweiterung und der Pfadverbindung können aufspannende Pfade gebildet werden. Sie entstehen, wenn ein Pfad $n - path\{< a_1 >< a_2 > C\{S\}\}$ existiert, bei dem die Gruppen $< a_1 >$ und $< a_2 >$ eine direkte Verbindung entweder zu zwei Ecken oder drei Rändern besitzen.

In Abbilung 4.12 ist ein aufspannender Pfad für Schwarz dargestellt. Die Berechnung für diesen Pfad ist:

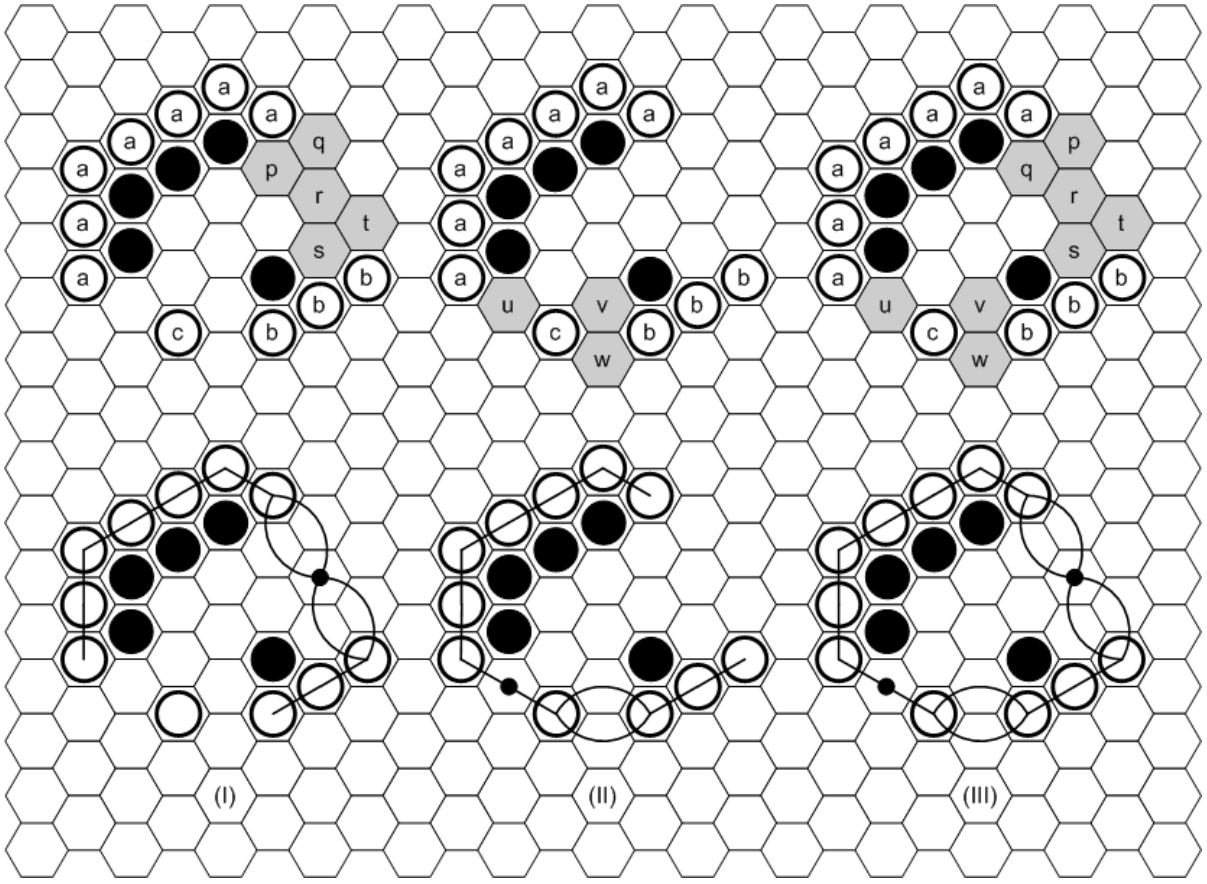

Abbildung 4.11: Pfadvereinigung

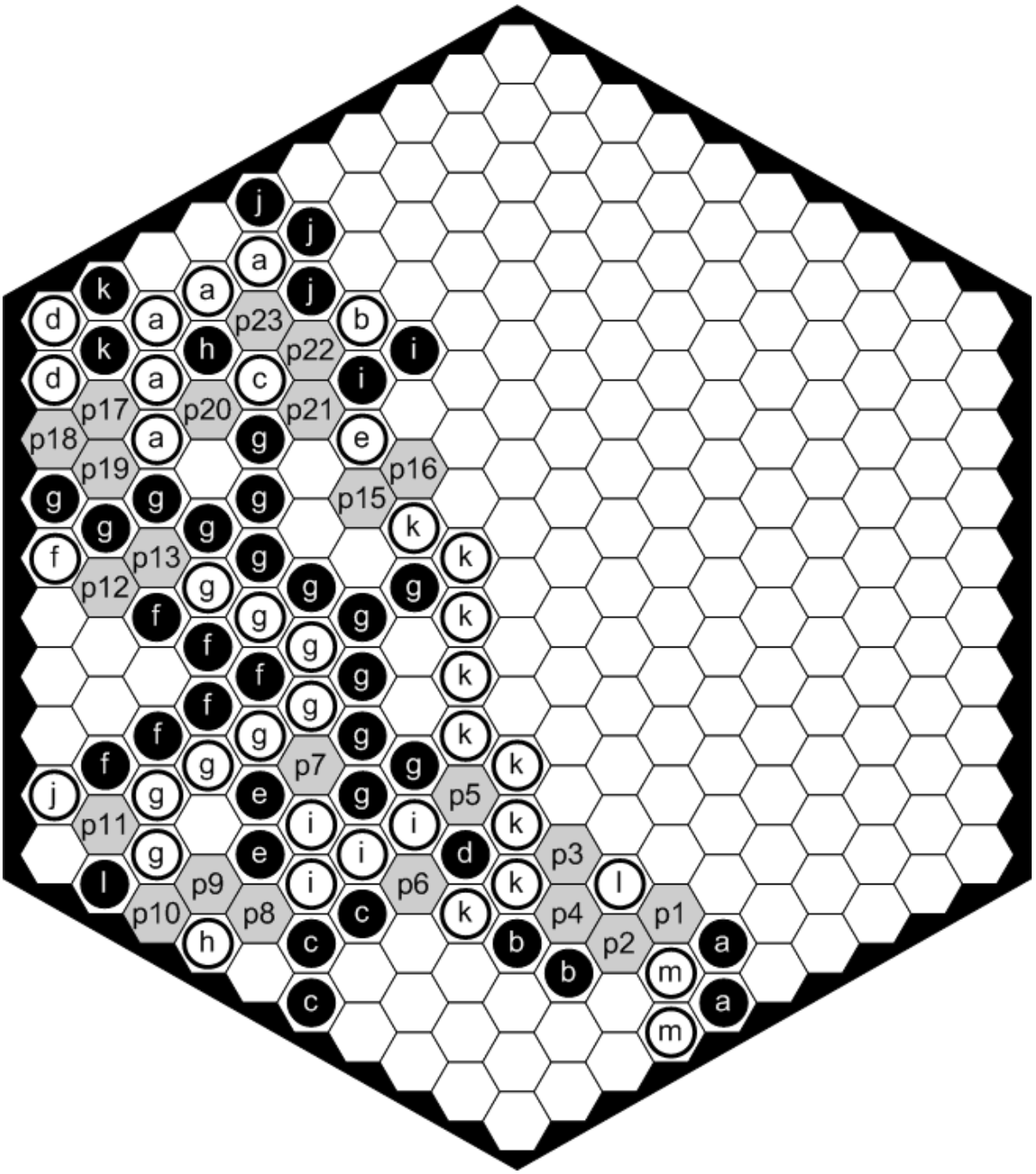

Abbildung 4.12: Aufspannender Pfad 2-path

$1 - path\left\{< \Delta g, f >< h > \left\{\underline{p20}\right\}\right\} \oplus 1 - path\left\{< h >< \Delta j > \left\{\underline{p23}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 2 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j > h\left\{\underline{p20}, \underline{p23}\right\}\right\}$

$1 - path\left\{\Delta < g, f >< i > \left\{\underline{p21}\right\}\right\} \oplus 1 - path\left\{< i >< \Delta j > \left\{\underline{p22}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 2 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j > i\left\{\underline{p21}, \underline{p22}\right\}\right\}$

$2{-}path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j > h\left\{\underline{p20}, \underline{p23}\right\}\right\} \otimes 2{-}path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j > i\left\{\underline{p21}, \underline{p22}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 1 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j > hi\left\{\underline{p20}, \underline{p21}, \underline{p22}, \underline{p23}\right\}\right\}$

da $< \Delta k >$ und $< \Delta j >$ Randgruppe des selben Randes sind kann man sie zusammenschreiben $< \Delta j, \Delta k >$

$1 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j, \Delta k > \left\{\underline{p17}, p18, p19\right\}\right\}$

$\otimes 1 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j, \Delta k > hi\left\{\underline{p20}, \underline{p21}, \underline{p22}, \underline{p23}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 0 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j, \Delta k > hi\left\{\underline{p17}, p18, p19, \underline{p20}, \underline{p21}, \underline{p22}, \underline{p23}\right\}\right\}$

$1 - path\left\{< \Delta c >< e > \left\{\underline{p8}\right\}\right\}$

$\oplus 1 - path\left\{< e >< \Delta g, f > \left\{\underline{p7}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 2 - path\left\{< c >< \Delta g, f > e\left\{\underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$

$1 - path\left\{< \Delta c >< d > \left\{\underline{p6}\right\}\right\}$

$\oplus 1 - path\left\{< d >< \Delta g, f > \left\{\underline{p5}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 2 - path\left\{< \Delta c >< \Delta g, f > d\left\{\underline{p5}, \underline{p6}\right\}\right\}$

$2 - path\left\{< \Delta c >< \Delta g, f > e\left\{\underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$

$\otimes 2 - path\left\{< \Delta c >< \Delta g, f > d\left\{\underline{p5}, \underline{p6}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 1 - path\left\{< \Delta c >< \Delta g, f > de\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$

die Rangruppen $< l\Delta >$ und $< \Delta c >$ verbinden den gleichen Rand

$1 - path\left\{< \Delta l >< \Delta g, f > \left\{\underline{p11}\right\}\right\}$

$\oplus 1 - path\left\{< \Delta c >< \Delta g, f > de\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 0 - path\left\{< \Delta c, \Delta l >< \Delta g, f > de\left\{\underline{p5}, \underline{p5}, \underline{p7}, \underline{p8}, \underline{p11}\right\}\right\}$

$0 - path\left\{< \Delta c, \Delta l >< \Delta g, f > de\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}, \underline{p11}\right\}\right\}$

$\oplus 0 - path\left\{< \Delta g, f >< \Delta j, \Delta k > hi\left\{\underline{p17}, p18, p19, \underline{p20}, \underline{p21}, \underline{p22}, \underline{p23}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 0{-}path\left\{< \Delta c, \Delta l >< \Delta j, \Delta k > \Delta f \Delta g hi\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}, \underline{p11}, \underline{p17}, p18, p19, \underline{p20}, \underline{p21}, \underline{p22}, \underline{p23}\right.\right.$

Die Berechnung für Weiß sieht etwas kürzer aus:

$1 - path\left\{< \Delta f, g, \Delta h > i\left\{\underline{p8}\right\}\right\}$

$\times 1 - path\left\{< \Delta f, g, \Delta h > i\left\{\underline{p7}\right\}\right\}$

$\Rightarrow 0 - path\left\{< \Delta f, g, \Delta h > i\left\{\underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$

$$1 - path\left\{i < k, l, \Delta m > \left\{\underline{p5}\right\}\right\}$$
$$\times 1 - path\left\{i < k, l, \Delta m > \left\{\underline{p6}\right\}\right\}$$
$$\Rightarrow 0 - path\left\{i < k, l, \Delta m > \left\{\underline{p5}, \underline{p6}\right\}\right\}$$
$$0 - path\left\{< \Delta f, g, \Delta h > i\left\{\underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$$
$$\otimes 0 - path\left\{i < k, l, \Delta m > \left\{\underline{p5}, \underline{p6}\right\}\right\}$$
$$\Rightarrow 0 - path\left\{< \Delta f, g, \Delta h >< k, l, \Delta m > i\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}\right\}\right\}$$

Der gezeigte Pfad hat für beide Spieler, Schwarz und Weiß, einen siegessicheren 0-path. Wenn beide freien Punktmenge disjunkt sind, käme es jetzt nur noch auf ein Auszählen der Züge an. Doch sie sind nicht disjunkt. Die Schnittmenge ergibt folgende Schnittpunkte: $\left\{\underline{p5}, \underline{p6}, \underline{p7}, \underline{p8}\right\}$. Nur ein Spieler kann durch diese Punktmenge eine Verbindung herstellen.

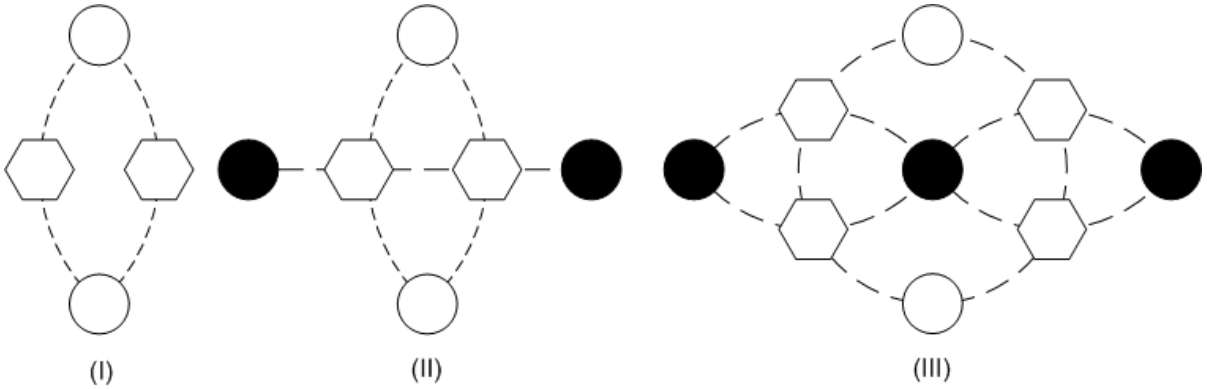

Abbildung 4.13: Verbindungsproblem zwischen 0-path und 2-path

Wenn ein Spieler eine 0-connected Verbindung herstellen kann, dann muss die Verbindung des anderen Spielers durch die gleiche Punktmenge ein 2-path sein. Aus der Definition geht hervor, dass jeder Pfad mit einem Zusammenhangswert von 0 mindest ein Duales Paar von freien Punkten besitzen muss (Abbildung 4.13(I)). Eine Verbindung muss aber auch genauso für Schwarz gelten. (Abbildung 4.13(II)). Damit der Pfad für Schwarz ein 0-path ist, muss die Verbindung zwischen den einzelnen Steinen ein duales Paar von freien Punkten beinhalten. Wenn dies aber der Fall ist, dann kann für den Spieler Weiß keine Verbindung mehr aufgebaut werden. Schwarz kann mit jedem Zug auf den Verbindungsversuch von Weiß antworten und eine sichere Verbindung herstellen.

Das Beispiel hat gezeigt, das ein aufgespannter Pfad mit einem Zusammenhangswert von 0 durch die Erweiterung von Pfaden mit einem Wert von 2 zu Fehlern führt. Das Beispiel zeigt unter Einbehaltung eines Zusammenhangwertes von 1 bei der Pfaderweiterung einen korrekten aufspannenden Pfad für Weiß.

Für die Strukturelle Entwicklung (s. Kapitel 5.1) sind Pfade unerläßlich. Speziell Pfade mit einem Zusammenhangswert von 0 sind vom großen Interesse. Solch ein Pfade kann auch als Gruppe beschrieben werden, wenn bestimmte Eigenschaften erfüllt sind. Alle Verbindungen zwischen den Ketten innerhalb des Pfades müssen 0-connected sein. Das bezieht auch die Abschlussgruppen und die Zwischenketten ein.

$0 - path\,\{< C_1\,\{S_1\} >< C_2\,\{S_2\} > C_3\,\{S_3\}\}$
$\Rightarrow 0 - group\,\{C_4\,\{S_4\}\}$
$\Rightarrow < C_4\,\{S_4\} >$
genau dann wenn
$\{S_1\} \wedge \{S_2\} \wedge \{S_3\} = \{\}$
und
$\{C_1\} \wedge \{C_2\} \wedge \{C_3\} = \{\}$

Die Ketten der Gruppe ist die Vereinigung der Kette von Abschlussgruppe und der Zwischenketten des Pfades $\{C_4\} = \{C_1\} \vee \{C_2\} \vee \{C_3\}$. Das gleich gilt für die Menge der freien Punkte $\{S_4\} = \{S_1\} \vee \{S_2\} \vee \{S_3\}$.

Wie gezeigt wurde, können sichere Gruppen durch eine einfach Kette (Singletongruppe) oder durch einen Nullpfad entstehen. Zusammen mit den Stufen und anderen Pfaden erzeugt dies einen Zyklus.

$sichereGruppe \Rightarrow Stufe \Rightarrow Pfad \Rightarrow Nullpfad \Rightarrow sichereGruppe \Rightarrow Stufe \Rightarrow$
...

4.6 Ring

Ein Ring bildet eine der interessantesten Strukturen auf dem Spielbrett. Es gibt unterschiedliche Meinungen über die Wichtigkeit eines Ringes. Zum Einen ist er eine nicht statische Siegbedingung. Und zum Anderen ein gutes Mittel um bestimmte Züge des Gegners zu erzwingen.

Der Aufbau eines Ringes ist sehr unterschiedlich. Ein Ring besitzt keine Endgruppe, denn die Endgruppe ist gleichzeitig wieder die Startgruppe. Wenn man die Startgruppe aufteilt, erkennt man, dass ein Ring im Grunde einem Pfad entspricht.

$n - ring\,(< C_1\,\{S_1\} >< C_2\,\{S_2\} > C_3\,\{S_3\})$
da $< C_2\,\{S_2\} >=< C_1\,\{S_1\} >$ ist schreibt man verkürzt
$n - ring\,(< C_1\,\{S_1\} > C_3\,\{S_3\})$

Der Zusammenhangswert des Ringes ist mit n gekennzeichnet. Mit $< C_1\,\{S_1\} >$ wird die Startgruppe gekennzeichnet. Der Weg des Ringes ist mit $C_3\,\{S_3\}$ angegeben. Die Menge der Zwischenknoten und der freien Punkte besteht aus allen Ketten und Punkten, die den Ring bilden. Dies kann auch Teile von anderen Gruppen einbeziehen.

Abbildung 4.14 zeigt einen einfachen Ring. Der Ausdruck für den Ring ist:

$1 - ring\,\{< a > bcd\,\{p, q, r, s, t, u, \underline{v}, w, x\}\}$

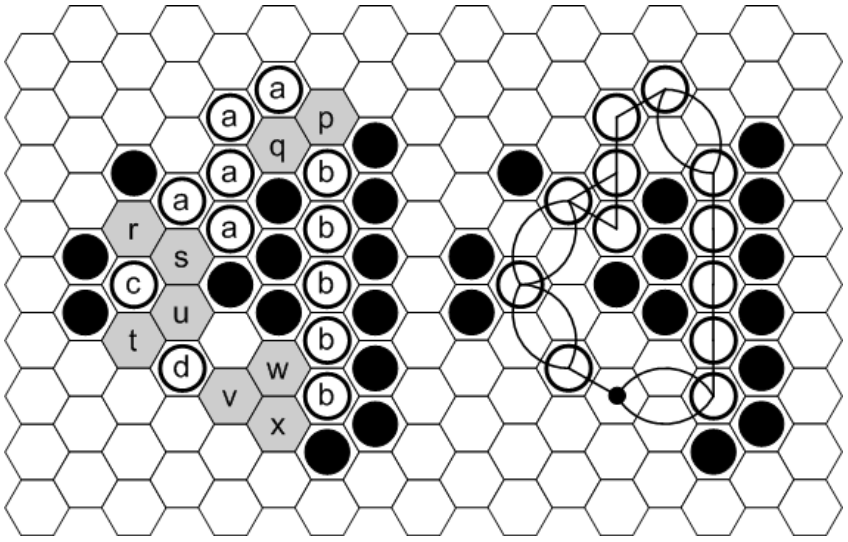

Abbildung 4.14: Beispielring

Um die entstandene Ringandrohung zu blockieren, muss Schwarz im nächsten Zug den Angriffspunkt v wählen.

Ringe können genauso wie Stufen und Pfade vereinigt werden. Dabei gilt die gleiche Beschränkung wie für Pfade. Der Zusammenhangswert darf nicht 2 oder größer sein. Zwei Ringe können vereinigt werden, wenn die Disjunktion der beinhalteten Kette nicht die leere Menge ist. Das Symbol für die Vereinigung ist $\otimes$.

$1 - ring\{< C_1\{S_1\} > C_2\{S_2\}\}$
$\otimes 1 - ring\{< C_3\{S_3\} > C_4\{S_4\}\}$
$\Rightarrow 0 - ring\{< C_1\{S_1\} C_5\{S_5\}\}$
genau dann wenn
$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \neq \{\}$
C_5 und S_5 ergibt sich aus
$C_5 = (C_2 \vee C_3 \vee C_4) \backslash C_1$
$S_5 = (S_2 \vee S_3 \vee S_4) \backslash S_1$

Kapitel 5

Strategien

Das Kapitel befasst sich mit unterschiedlichen Strategien des Havannahspiels. Angefangen von einer einfach strukturellen Spielentwicklung und wichtigen Spielpositionen bis zu komplexen Sachen wie Leitern und Mustern.

5.1 Struktur-Entwicklung

Die strukturelle Entwicklung ist neben bestimmter Spielfelder des Positionsspiel ausschlaggebend für ein Spiel mit guter Gewinnaussicht. Es ist ein zentraler Punkt, der über Sieg oder Niederlage entscheidet.

5.1.1 Entwicklung mit Brücken

Brücken und die direkte Nachbarschaft sind die einfachsten und sichersten 0-connected Verbindungen. Doch zwischen beiden gibt es einen Unterschied, speziell in der räumlichen Entwicklung.

Ein Zug auf die direkte Nachbarschaft vergrößert die Entfernung von Start- und Endfeld einer Kette (oder Singletongruppe) um ein Feld. Die Brücke bietet die gleiche Sicherheit eines direkten Nachbarschaft mit dem Unterschied, dass sie bei gleicher Zuganzahl die doppelte Entfernung zurücklegen kann.

Abbildung 5.1 zeigt den Unterschied zwischen beiden Möglichkeiten. Klar zu erkennen ist die größere Entfernung, die durch eine Verbindung durch die Benutzung von Brücken entsteht.

5.1.2 Verbindungsmaximierung/-minimierung

Bei einem Verbindungsspiel ist stehts die oberste Priorität seine Verbindung zu maximieren. In Kapitel 5.1.1 wurde die Möglichkeit gezeigt, sichere Verbindungen über größere Entfernungen mittels Brücken zu erreichen. In wenigen Zügen kann so ein aufspannender Pfad (s. Kapitel 4.5) zwischen verschiedenen Ränden oder Ecken hergestellt werden.

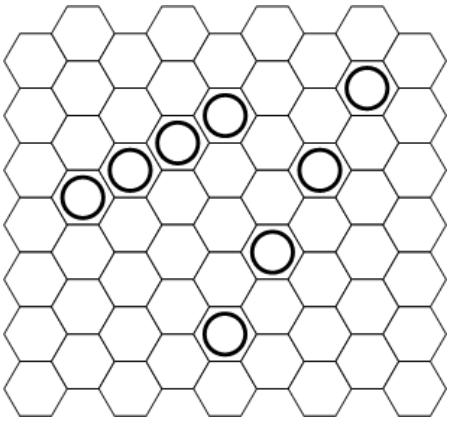

Abbildung 5.1: Unterschied zwischen direkter Nachbarschaft und Brücken

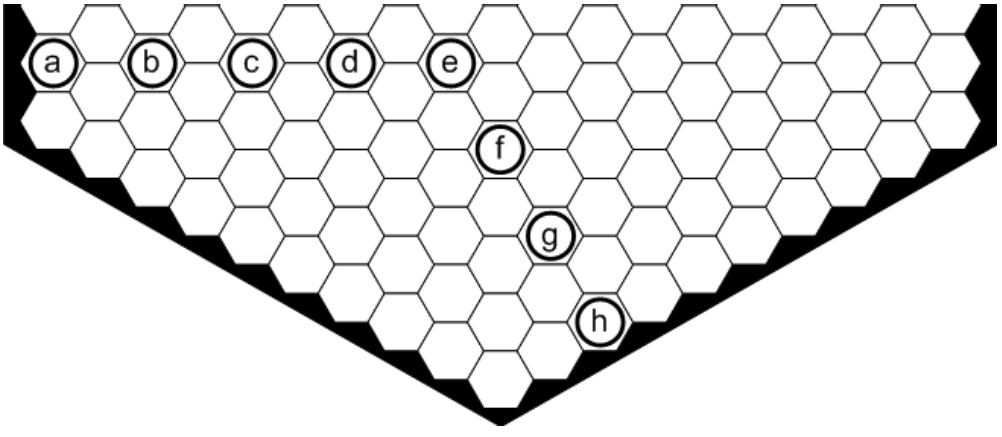

Abbildung 5.2: Verbindungsmaximierung

In der Abbildung 5.2 ist so ein Fall gezeigt. Weiß hat in 8 Zügen einen aufspannenden Pfad erzeugt. Dieser Pfad wird Weiß den Sieg bringen. Er Pfad verbindet den linken und unteren rechten Rand. Weiß benötigt nur noch einen Zug um eine Verbindung zu dem dritten Rand herzustellen. Mindestens zwei Steine von Weiß sind mit einem Zug mit dem Rand sicher verbunden ist. Mit Hilfe der Pfadvereinigung aus Kapitel 4.5 wissen wir, dass zwei 1-connected Pfade mit gleichen Abschlussgruppen zu einem 0-connected Pfad vereinigt werden können.

Schwarz muss in diesem Beispiel Weiß rechtzeitig stören. Das Kapitel 5.1.3 zeigt wie der Aufbau gestört werden kann.

5.1.3 Blockieren

Früher oder später muss eine Spielaufbau blockiert werden. Ohne eine Blockade gewinnt der Spieler, der den ersten Zug macht. Für einen Ring werden mindestens 6 Züge, für eine Brücke 10 Züge und für eine Gabel 12 Züge benötigt.

Eine Blockade kann auf unterschiedliche Weise erzeugt werden. Die einfachste ist die direkte Blockade. Sie entsteht durch das Setzen eines Steines in die direkte Nachbarschaft des Gegenspielers. Das Vordringen des Spielers wird schnell aufgehalten. Der Gegenspieler muss nun diesen feindlichen Stein umspielen. Die Konsequenz aus der Blockade in die direkte Nachbarschaft ist eine Leiter, wie in Kapitel 5.6 beschrieben. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.3 zu sehen. Es gibt zwei Punkte für Schwarz um die Vorstoßrichtung von Weiß zu ändern. Für beide Punkte ist der Bereich grau markiert, den Schwarz geblockt hat.

Ein effektiveres Blocken wäre die Belegung der Pivot-Punkte, die durch Brückenstufen erzeugt werden. Die Abbildung 5.4 zeigt eine Blockade durch Belegung des Pivot-Punktes. Weiß kann seine Brückenstufen nicht mehr setzen und muss zum Punkt p oder q ausweichen. Schwarz hat somit den grau markierten Bereich vor dem Eindringen von Weiß geschützt. Weiß hat auch die Möglichkeit durch einen adjazenten Zug um den schwarzen Stein zu spielen. Doch dies wird, wenn Schwarz es nicht zuläßt, in einer Leiter enden und der blockierte Bereich vergrößert sich.

Die effektivste Möglichkeit Weiß aufzuhalten, ist eine Belegung eines Feldes in der direkten Nachbarschaft von einem Pivot-Punkt. Die Abbildung 5.5 verdeutlicht dies. Schwarz spielt nicht direkt auf den Pivot-Punkt p der Brückstufen, sondern belegt ein Nachbarfeld. Wenn Weiß Punkt p spielt, dann entsteht wieder eine Leiter bei der Belegung von q mit Schwarz. Diese Leiter deckt den maximalen Bereich ab.

Bei der Entscheidung für eine Blockade sollten stets die Felder beobachtet werden, die es gilt zu blockieren. Gerade im Randbereich des zu schützenden Bereiches gibt es die Möglichkeit die Leiter zu verlassen. Es sollte ganz genau überlegt werden durch so eine Blockade eine Leiter zu erzwingen. Denn anders als in Hex [Bro00] gibt es bei Havannah keine feste Belegung der Rändern. Somit hat eine Leiter stets für beide Spieler einen Vorteil, denn sie endet immer an einem Rand. Dieser Rand, solange er noch nicht von einem Spieler verbunden ist, erhöht von beiden Spielern die Siegchance.

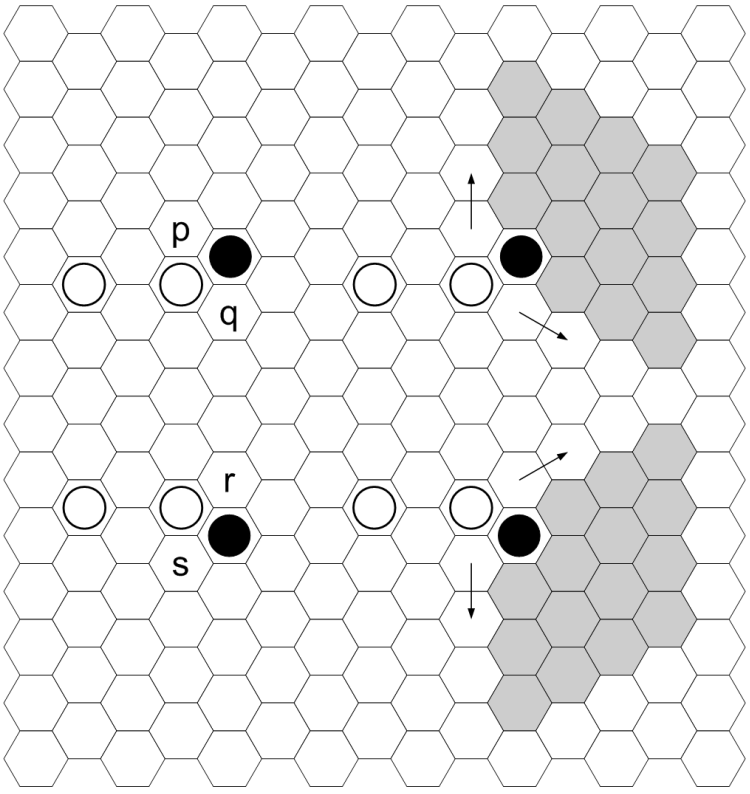

Abbildung 5.3: Blockade in die direkte Nachbarschaft und dargestellter blockierter Bereich

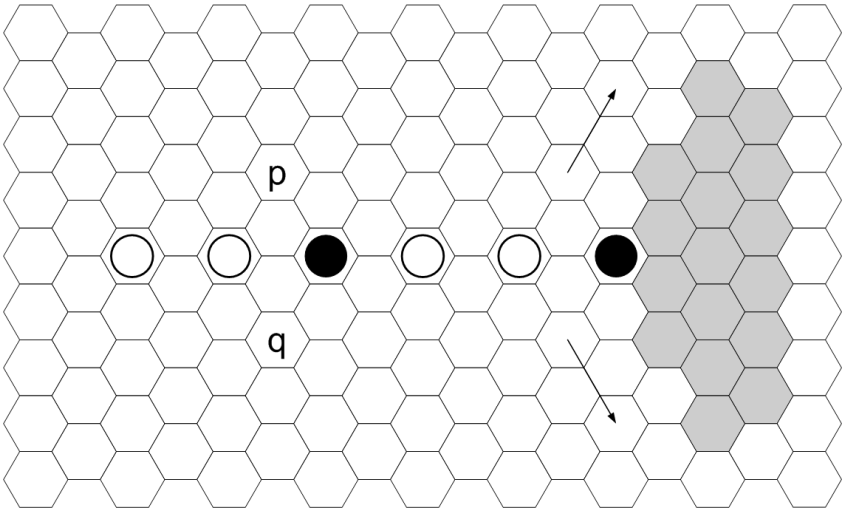

Abbildung 5.4: Blockade auf Pivot-Punkte von Brückenstufen

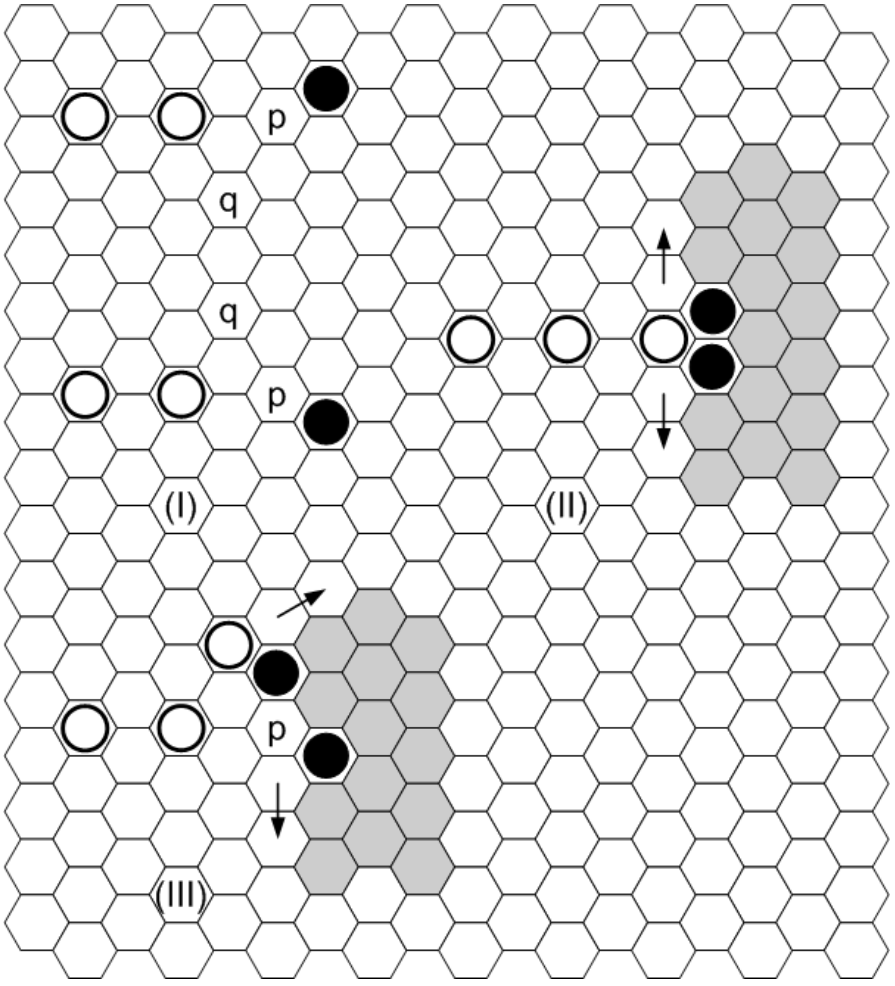

Abbildung 5.5: Blockade in der Nachbarschaft von Pivot-Punkten

Eine Blockade sollte nicht lange hinausgezögert werden. Ein zu spätes Reagieren auf einen Zug des Gegners kann schnell zu einer Situation wie in der Abbildung 5.2 gezeigt führen. Eine Reaktion sollte die eigenen Verbindungsmöglichkeiten erhöhen und die des Gegners verringern. In Kapitel 5.3 wird auf die Möglichkeit des Stehlen von Raum eingegangen.

5.2 Knotenpunkte

Bei Verbindungen gibt es bestimmte Punkte, die sogenannten Pivot-Punkte, die wichtig sind, um die Sicherheit von Strukturen zu gewährleisten. Auf dem Spielfeld gibt es ähnliche Punkte, die strategischen Überlegungen wert sind. Diese Knotenpunkte sind vorallem in der Anfangsphase des Spieles von Interesse. Im späteren Verlauf verlieren sie aber ihre Bedeutung, da sich durch die Spielentwicklung die Faktoren, die von Interesse bei diesen Punkten sind, ändern. Knotenpunkte sind nicht ganz so wichtig für den Verlauf des Spieles, bieten aber gute Startpunkte.

Am Interessantesten sind Knotenpunkte, von denen aus in möglichst wenigen Zügen, Ränder oder Ecken erreicht werden können. In der Abbildung 5.6 sind 6 Knotenpunkte gezeigt, die jeweils über eine 1-step Stufe zu einem Rand sicher verbunden sind. Der graue Bereich des Randes ergibt sich aus einem Muster, das in Kapitel 5.5 beschrieben ist.

Die Anordnung der Rände läßt auch andere Knotenpunkte zu. Für jeden Randbereich existieren 6 Punkte, die jeweils sicher mit dem Rand verbunden sind und nur eine 1-step Stufe zum nächsten Rand haben. Zu sehen ist das in der Abbildung 5.7. Diese Punkte scheinen auf den ersten Blick die bessere Wahl zu sein. Während den drei Spielzügen für die Erstellung der Formation besteht die Möglichkeit mittels Brücken diese Ecke zu blockieren. Die Ecke ist somit abgesperrt. Es können nur noch 2 Ränder oder 1 Ecke verbunden werden. Jede Ringandrohung muss jedoch erkennt werden.

5.3 Territorium

Eine Reaktion ist dann nötig, wenn der Gegner versucht, die eigene Verbindung zu blockieren oder zu unterbrechen. Die Abbildung 5.2 ist ein gutes Beispiel dafür, dass Schwarz versäumt hat, die Verbindung von Weiß zu unterbrechen. Ein Aufhalten wäre zum Beispiel mittels der in Kapitel 5.1.3 gezeigten Blockade möglich.

Das Territorium eines Spielers umfasst alle Felder, die in direkter Nachbarschaft zu Spielsteinen und Rändern liegen. Die Abbildung 5.8 zeigt das Territoium von Weiß. Klar zuu erkennen ist das Gebiet, das durch die Ränder entsteht. Felder, die mit gegnerischen Spielsteinen belegt sind, blockieren das Territorium.

Eine Vergößerung des Territorium geht mit der Strategie der räumlichen Entwicklung durch Brücken einher, die in Kapitel 5.1.1 beschrieben wurde. Eine Möglichkeit die Entwicklung zu beurteilen ist das Zählen der Felder, die das Territorium bilden. Die Anzahl der Felder wird mit einem Sigma Σ beschrieben, gefolgt von einem w für den weißen

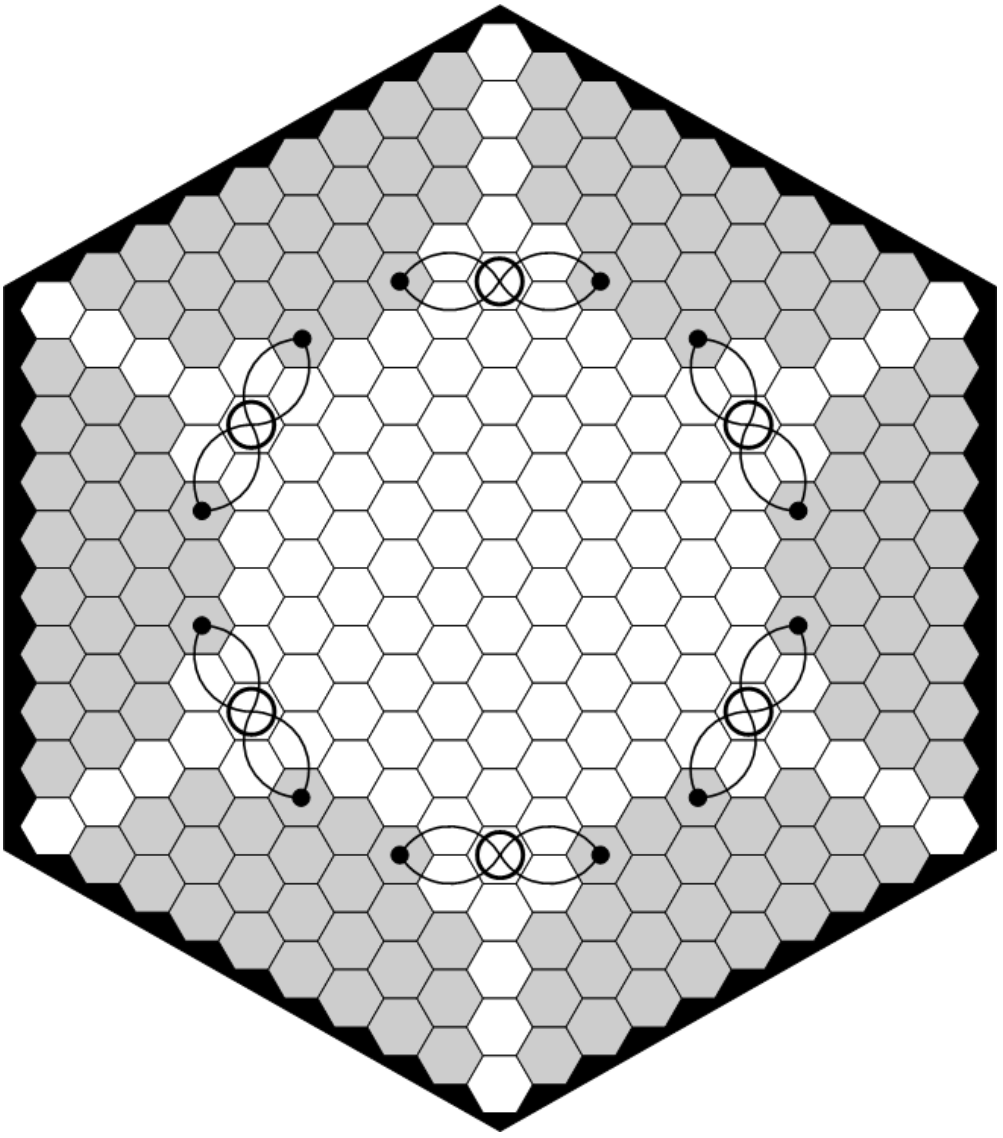

Abbildung 5.6: Knotenpunkte

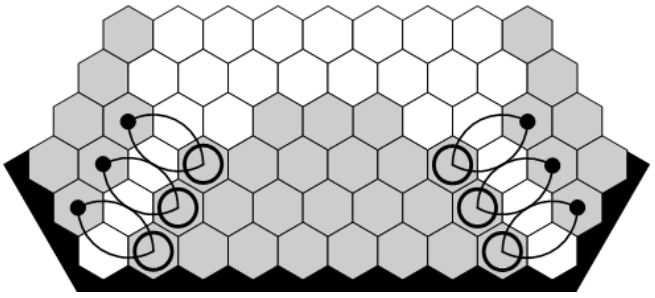

Abbildung 5.7: Knotenpunkte

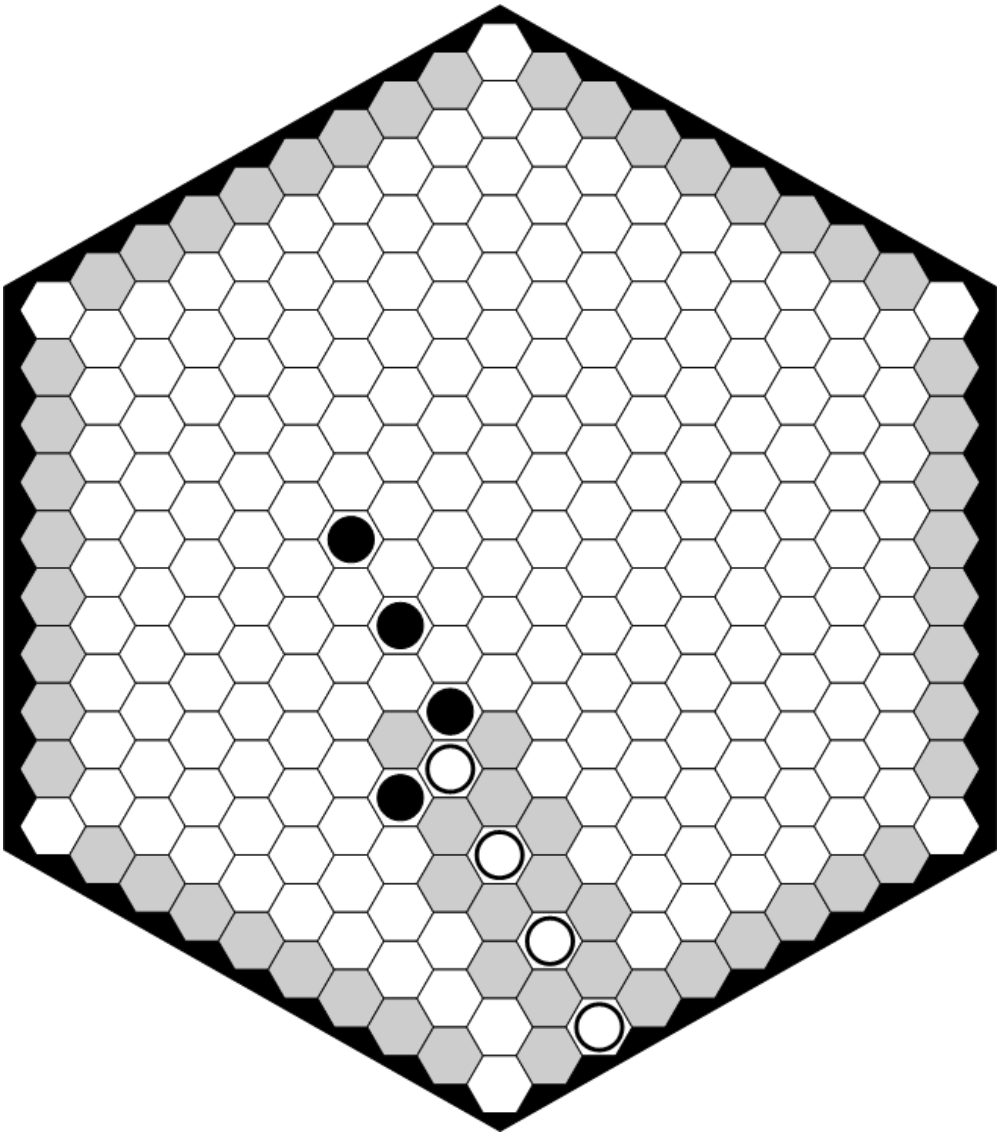

Abbildung 5.8: Territorium von Weiß

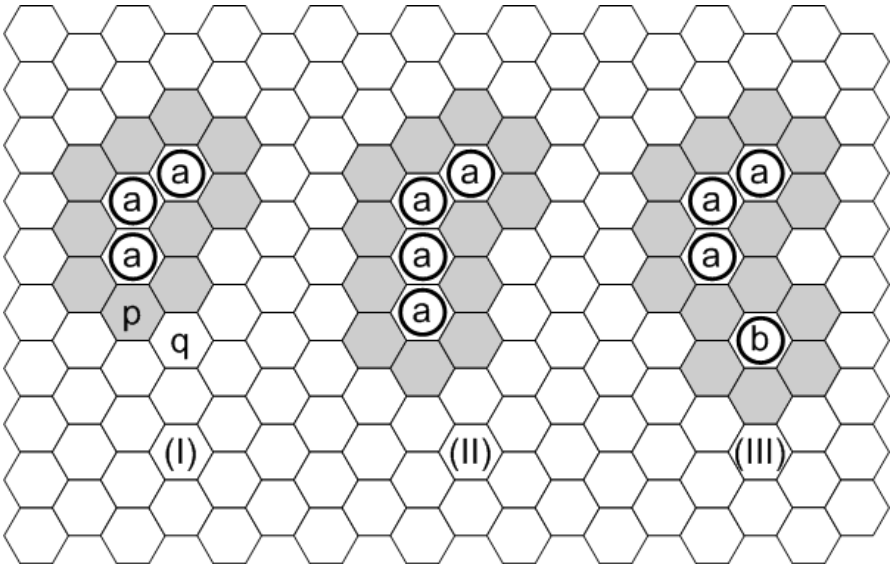

Abbildung 5.9: Entwicklung des Territorium

Spieler und einem s für den schwarzen. Die Abbildung 5.9 zeigt den Unterschied der Entwicklung zwischen der direkten Nachbarschaft und einer Brücke im Bezug auf das Territorium noch einmal genauer. Im ersten Teil ist die Ausgangsgruppe $< a >$ zu sehen. Die Anzahl der angrenzen Felder ist $\Sigma w = 10$. Der zweite Teil zeigt die Veränderung des Territorium bei einer 1-step Stufe auf den Punkt p. Zu erkennen ist eine kleine Vergrößerung der direkten Nachbarschaft dieser Gruppe. Die neue Anzahl Σw ist 12. Den größeren Unterschied ergibt sich aber bei Benutzung einer 0-step Brückenstufe. Diese ist im dritten Teil der Abbildung erkennbar. Das Territorium vergrößert sich von $\Sigma w10$ auf den neuen Wert $\Sigma w = 14$.

Bei der Überlappung von Brücken zeigt die Anzahl der direkten Nachbarschaften ein klare Richtung, aber es zeigt auch die Gefahr. Im ersten Teil sind die beiden Territorien von Weiß und Schwarz dargestellt. Die Anzahl der Felder ist gleich $\Sigma w = \Sigma s = 7$. Der zweite Teil der Abbildung zeigt das Eindringen von Weiß in den nicht überlappenden Punkt der Brücke. Schwarz muss nun die Verbindung zwischen den eigenen Spielsteinen wiederherstellen und erzwingt somit den Zug 3 von Weiß. Die neuen Territorien lauten $\Sigma w = 10$ und $\Sigma s = 6$. Die Anzahl hat sich für Weiß erhöht, während sie für Schwarz gesunken ist. Auf den ersten Blick hat Weiß einen Vorteil errungen. Aber bei genauerer Überlegung hat Weiß die Spielherrschaft an Schwarz abgeben. Nun kann muss Weiß auf die Züge von Schwarz antworten. Es wurde zwar Territorium gewonnen, aber für den Preis das Spiel zu diktieren. Anders sieht es im dritten Teil der Abbildung aus. Hier belegt Weiß den überlappenden Punkt und zwingt Schwarz zu Zug 2. Die Anzahl der direkten Nachbarschaften ist für beiden auf den Wert $\Sigma w = \Sigma s = 7$ gesunken.

Das Beispiel hat gezeigt, das ein Erzwingen einer Verbindung bei überlappenden Brücken zu keinem Vorteil führt. Zwar vergrößert sich das eigene Territorium, doch die Spielherrschaft wird an den Gegner abgegeben weil ein Zug mehr benötigt wird. Das Fazit für überlappende Brücke ist, diese Verbindung solange bestehen zu lassen und bei Notwendigkeit zuerst den überlappenden Punkt zu wählen. Dadurch wird die eigene Verbindung geschlossen und der Gegner gleichzeitig zu einem Zug gezwungen.

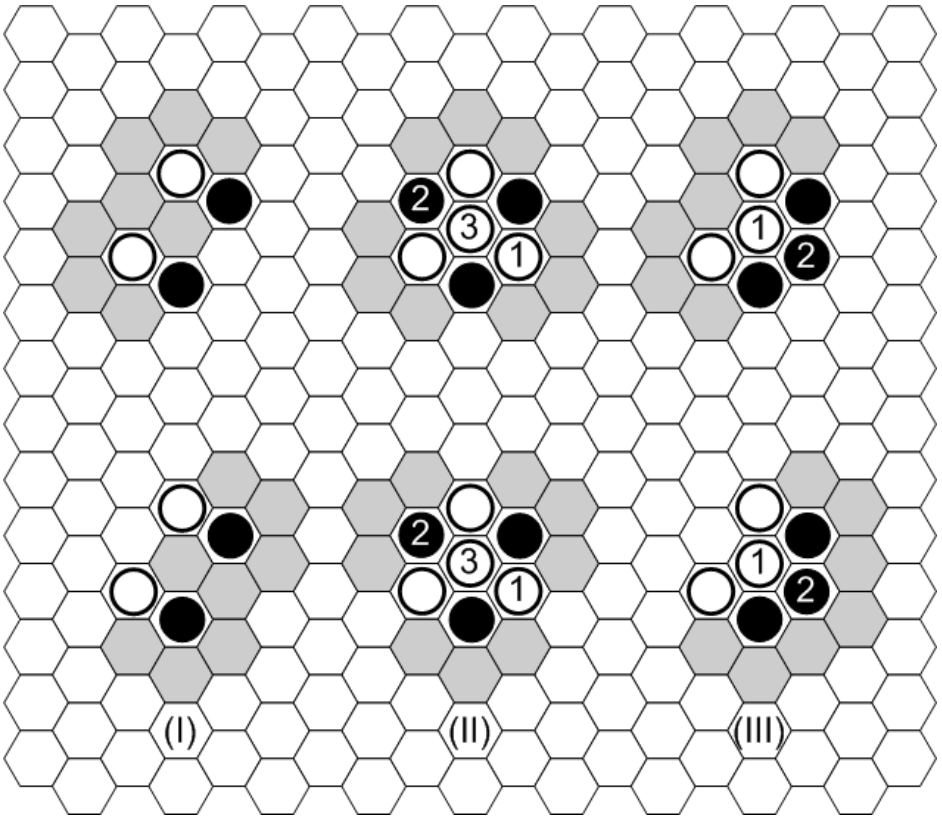

Abbildung 5.10: Territorium bei überlappenden Brücken

5.4 Erzwungende Spielzüge

Im Kapitel 5.3 wurde das Beispiel der überlappenden Brücke gebracht im Zusammenhang mit einer kleinen Reihe von erzwungenden Spielzügen. Dieses Erzwingen bringt beiden Spielern einen Vorteil. Deswegen sollte gut überlegt werden, welche Züge man erzwingen sollte.

Den Gegner zu Zwingen nicht gewollte Spielzüge zu tätigen, ist bei einer Ringandrohung zu sehen, die benutzt wird um eine sichere Verbindung zu durchbrechen. Die Abbildung 5.11 zeigt so ein Beispiel.

Weiß ist am Zug und spielt auf des Feld s. Somit entsteht eine Ringandrohung durch den

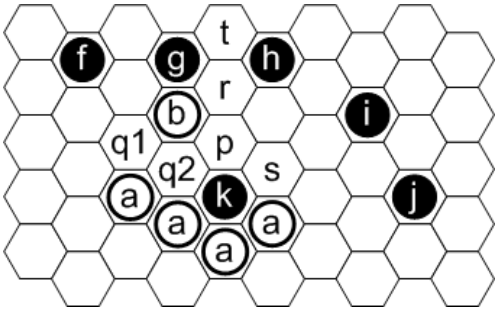

Abbildung 5.11: Erzwungender Zug durch Schwarz

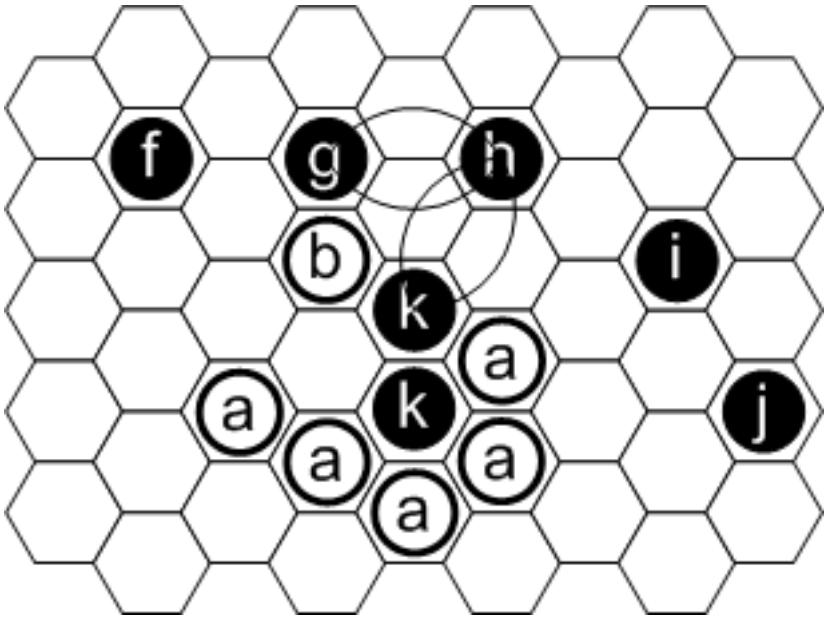

Abbildung 5.12: Erzwungender Zug durch Ringandrohung

Ring $1 - ring\left\{< a >< b > \left\{\underline{p}, q1, q2\right\}\right\}$. Schwarz muss nun diese Ringandrohung beantworten durch Wahl des Pivot-Punktes p. Die nun entstandene Formation der schwarzen Steine bildet eine Überlappung der freien Punktmenge im Feld r. Schwarz droht nun Weiß erneut mit einem Ring durch die Wahl des Feldes r. Weiß hat nun zwei Bedrohungen. Zum einen die Drohung von Schwarz einen sicheren Ring zu erzeugen und zum zweiten das Eindringen in den sichern Pfad $0 - path\left\{< g >< h > \{r, t\}\right\}$. Weiß bleibt keine andere Wahl als den Ring zu verhindern und verliert somit die Verbindung zwischen den beiden Ketten g und h. Mit dem nächsten Zug wählt Schwarz das Feld t und hat somit den Pfad zerstört. Das Beispiel hat gezeigt, wie durch Doppeltbedrohungen sichere Pfade aufgelöst werden können.

5.5 Muster

Die Verwendung von Mustern bietet die Möglichkeit bestimmte Verbindungsstrukturen zu vereinfachen. Die einfachsten Verbindungsmuster wurden in Kapitel 4.1 und Kapitel 3.3 vorgestellt. Diese Muster werden auch als Verbindungsmuster bezeichnet, da sie als Verbindung für Stufen oder Pfade dienen oder die Basis für Flächenmuster sind.

Ein Muster markiert immer einen Bereich von Feldern. Dieser Bereich ist abhängig von der Menge der Spielsteine, von denen das Muster ausgeht. Das in Kapitel 5.5.1 gezeigte Verbindungsmuster basiert auf einem Spielstein und dem umgebenden Bereich. Anders das Flächenmuster aus Kapitel 5.5.2. Dort ergibt sich das Muster aus der Kombination mehrerer Spielstein und ergibt einen größeren markierten Bereich.

Davil Boll [Bol94] hat die Muster beschrieben als eine sichere und freie Verbindung zwischen zwei Steinen oder einem Stein und einem Rand, selbst wenn der Gegner den nächsten Spielzug hat.

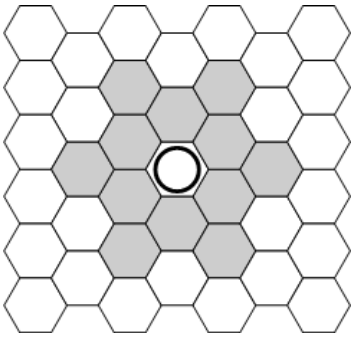

Abbildung 5.13: Verbindungsmuster eines Spielsteines

5.5.1 Verbindungsmuster

Die Verbindungsmuster werden benötigt, um Stufen oder Pfade zu erzeugen. Ausgehende von einem Spielstein zeigt die Abbildung 5.13 das Verbindungsmuster eines einzelnen Spielsteines. Gut zu erkennen sind die sechs Felder der direkten Nachbarschaft. Bei einem freistehenden Feld, wie das abgebildete, sind auch alle sechs Brückenstufen vorhanden.

5.5.2 Flächenmuster

Die direkte Nachbarschaft und Brücke sind die einfachsten Muster. Komplizierter sieht es bei den Flächenmustern aus. Durch die Kombination von mehreren sicher miteinander verbundenen Spielsteinen ergibt sich ein großer Bereich. Die Felder, die durch diesen Bereich markiert sind, besitzen eine sichere Verbindung zu den Ausgangssteinen.

Auf dem Havannah-Spielbrett bilden die Stein-Rand Muster die einfachsten aber auch interessantesten Strukturen. Anhand dieser Muster wird das Prinzip erklärt, wie sie entstehen. Auf dem Spielbrett gibt es eine unzählige Anzahl unterschiedlicher Flächenmuster. Alle basieren aber auch dem gleichen Prinzip.

Die Abbildung 5.14 zeigt die unterschiedlichen Muster.Zur besseren Identifikation werden die Muster mit einer römischen Zahl gefolgt von einem kleinen fortlaufenden Buchstaben markiert. Die Zahl gibt die Anzahl der Reihen des Musters an. Die weißen Felder in der Abbildung bedeuten, dass die Belegung dieses Feldes für die Sicherheit des Muster nicht relevant ist. Das Fragezeichen im Muster IVa ergibt sich aus der Überlagerung der einzelnen Stufe, die von dem projektierten Pfade in Abbildung 5.15 ausgehen. Dieser Feld biete eine gute Möglichkeit eines Angriffspunktes auf das Muster.

So ein Angriffsversuch ist in der Abbildung 5.16 zu sehen. Schwarz versucht in das Muster einzudringen mit Zug 1. Weiß antwortet mit Zug 2 und stellt somit wieder eine sichere Verbindung her.

Der Aufbau eine Musters folgt den gleichen Prinzipien wie einer sicheren Verbindung. Damit ein Feld eine sichere Verbindung zum Rand oder einer Gruppe von Steinen besitzt, muss diese Verbindung 0-connected sein. Die folgende Berechnung bestätigt das Muster aus der Abbildung 5.17. Zur Erleichterung der Rechnung wird dem Rand die Gruppenbezeichnung $< b >$ zugewiesen.

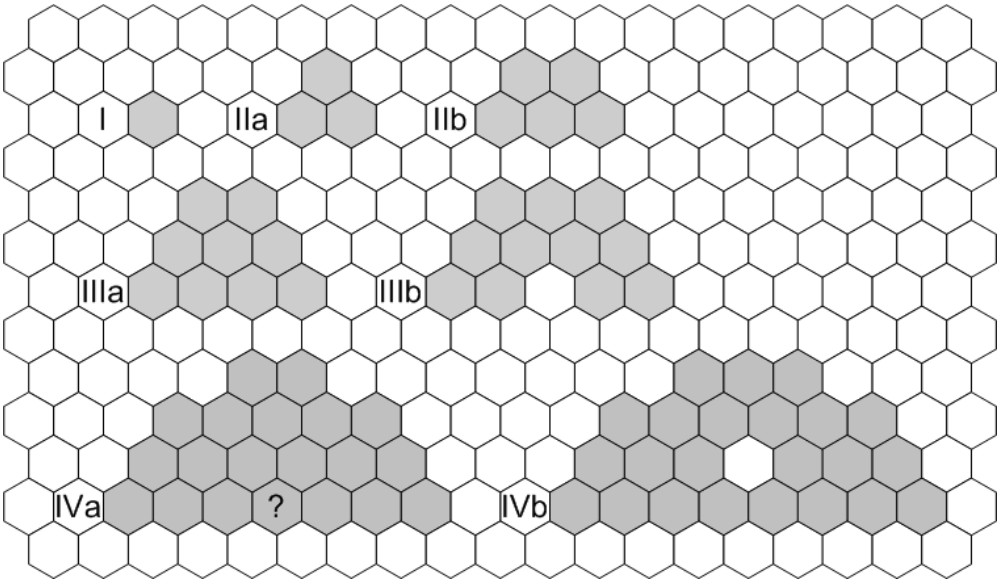

Abbildung 5.14: Übersicht Flächenmuster

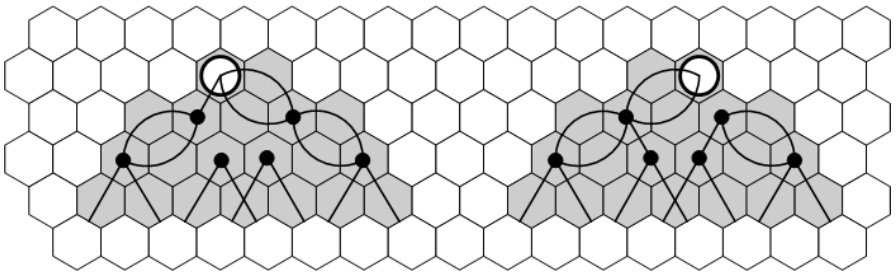

Abbildung 5.15: 2 Projektierte Pfad für Flächenmuster IVa

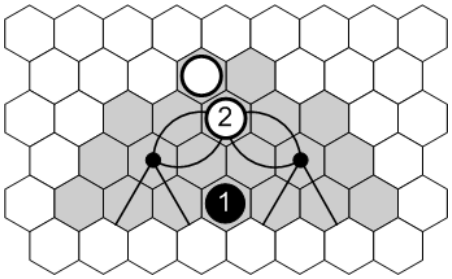

Abbildung 5.16: Flächenmuster IVa Angriffspunkt

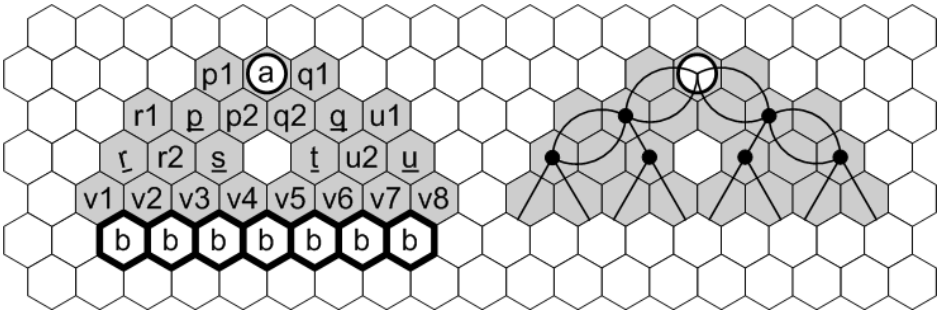

Abbildung 5.17: Berechnungsbeispiel Flächenmuster IVb

$$1 - step\{< b > \underline{r}\,\{v1, v2\}\} \oplus 1 - step\left\{\underline{r}\ \underline{p}\,\{r1, r2\}\right\}$$

$$\Rightarrow 2 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{r}, r1, r2, v1, v2\}\right\}$$

$$1 - step\{< b > \underline{s}\,\{v3, v4\}\} \oplus 1 - step\left\{\underline{s}\ \underline{p}\right\}$$

$$\Rightarrow 2 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{s}, v3, v4\}\right\}$$

$$2 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{r}, r1, r2, v1, v2\}\right\}$$

$$\otimes 2 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{s}, v3, v4\}\right\}$$

$$\Rightarrow 1 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{r}, r1, r2, \underline{s}, v1, v2, v3, v4\}\right\}$$

$$1 - step\left\{< b > \underline{p}\,\{\underline{r}, r1, r2, \underline{s}, v1, v2, v3, v4\}\right\}$$

$$\oplus 0 - step\left\{\underline{p} < a > \{p1, p2\}\right\}$$

$$\Rightarrow 1 - step\left\{< b >< a > \left\{\underline{p}, \underline{r}, r1, r2, \underline{s}, v1, v2, v3, v4\right\}\right\}$$

$$1 - step\{< b > \underline{t}\,\{v5, v6\}\} \oplus 1 - step\left\{\underline{t}\ \underline{q}\right\}$$

$$\Rightarrow 2 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{t}, v5, v6\}\right\}$$

$$1 - step\{< b > \underline{u}\,\{v7, v8\}\} \oplus 1 - step\left\{\underline{u}\ \underline{q}\,\{u1, u2\}\right\}$$

$$\Rightarrow 2 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v5, v6, v7, v8\}\right\}$$

$$2 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{t}, v5, v6\}\right\}$$

$$\otimes 2 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{u}, u1, u2, v7, v8\}\right\}$$

$$\Rightarrow 1 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v5, v6, v7, v8\}\right\}$$

$$1 - step\left\{< b > \underline{q}\,\{\underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v5, v6, v7, v8\}\right\}$$

$$\oplus 0 - step\left\{\underline{q} < a > \{q1, q2\}\right\}$$

$$\Rightarrow 1 - step\left\{< b >< a > \left\{\underline{q}, q1, q2, \underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v5, v6, v7, v8\right\}\right\}$$

$$1 - step\left\{< b >< a > \left\{\underline{p}, \underline{r}, r1, r2, \underline{s}, v1, v2, v3, v4\right\}\right\}$$

$$\otimes 1 - step\left\{< b >< a > \left\{\underline{q}, q1, q2, \underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v5, v6, v7, v8\right\}\right\}$$

$$\Rightarrow 0 - step\left\{< b >< a > \left\{\underline{p}, p1, p2, \underline{q}, q1, q2, \underline{r}, r1, r2, \underline{s}, \underline{t}, \underline{u}, u1, u2, v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8\right\}\right\}$$

Das Beispiel hat den prinzipiellen Aufbau der Muster gezeigt. Von jedem Pivot-Punkt müssen mindestens zwei 1-path Pfade zur Zielgruppe vorhanden sein. Pivot-Punkte und freie Punktmenge der Pfade können sich überschneiden. Jedoch muss immer ein 1-path Pfad vorhanden sein, der diese Überschneidung nicht teilt. In dieser Überschneidung darf vom alternativen Pfad kein Pivot-Punkt liegen und dieses Überschneidungsfeld darf nicht in der freien Punktmenge liegen. In Kapitel 6.2 wird dieser Sachverhalt benutzt um die maximal sichere Entfernung zu bestimmen.

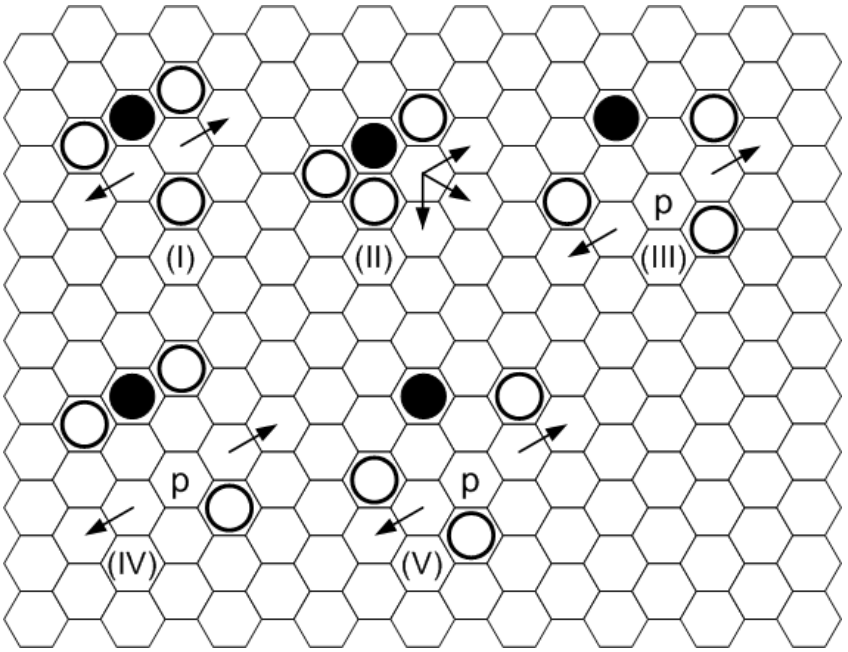

Abbildung 5.18: Leiter Formationen

5.6 Leiter

Die Formation einer Leiter bietet interessante Aspekte und Vorteile für beide Spieler, wenn sie nicht gut geplant ist. Sie entstehen beim Ziehen direkt an einen gegnerischen Stein. Ein Kontern des Gegners erzeugt dann eine Leiter. In der Abbildung 5.18 sind verschiedene Formationen zu erkennen, die zu einer Leiter führen. Schwarz ist jeweils am Zug. Die erste Formation nennt man auch Flaschenhals [Bro00]. Schwarz spielt direkt zwischen zwei weißen Steinen. Weiß kontert mit dem Blockieren der Brückenstufe. Nun können hier zwei Leitern entstehen. Die Richtung kann Schwarz bestimmen. Die Abbildung 5.18(II) eröffnet für Schwarz andere Richtungen, durch eine Blockade von Weiß in die direkte Nachbarschaft. Die Art der Leiter, die Weiß erzwingen kann, richtet sich nach dem Vorteil, den Schwarz erringen könnte. Im vierten Teil der Abbildung ist die dritte Möglichkeit einer Blockade bei der Formation Flaschhals zu erkennen. Sie entspricht der dritten Möglichkeit des Blockierens wie es in Kapitel 5.1.3 gezeigt wurde. Das Feld p symbolisiert dabei den Zug von Schwarz. Die entstehenden Leitern aus diesem Zug sind mit Pfeilen gekennzeichnet. Ähnlich des Erzwingens von Leitern durch einen Flaschenhals gibt es auch die Möglichkeit durch eine Brückenstufe eine Leiter zu erzwingen. Die Abbildungen 5.18(III) und (V) verdeutlichen das. Das Feld p stellt den Zug von Schwarz dar um die durch Pfeile gekennzeichnete Leiter zu erzwingen.

Abhängig von der Sperrrichtung der Leiter gibt es auch Teilformationen. Diese Formationen sind nicht komplett gegenüber den bereits beschriebenen. Sie bilden dennoch die Möglichkeit der Entwicklung einer Leiter. Abbildung 5.6 zeigt mögliche Teilformationen.

Der graumarkiterte Bereich entspricht einem Teil der Flächenmuster aus Kapitel 5.5.2. Da Schwarz am Zug ist, kann eine Verbindung durch dieses Flächenmuster entstehen, wenn es durch entsprechende Spielstein erzeugt wird.

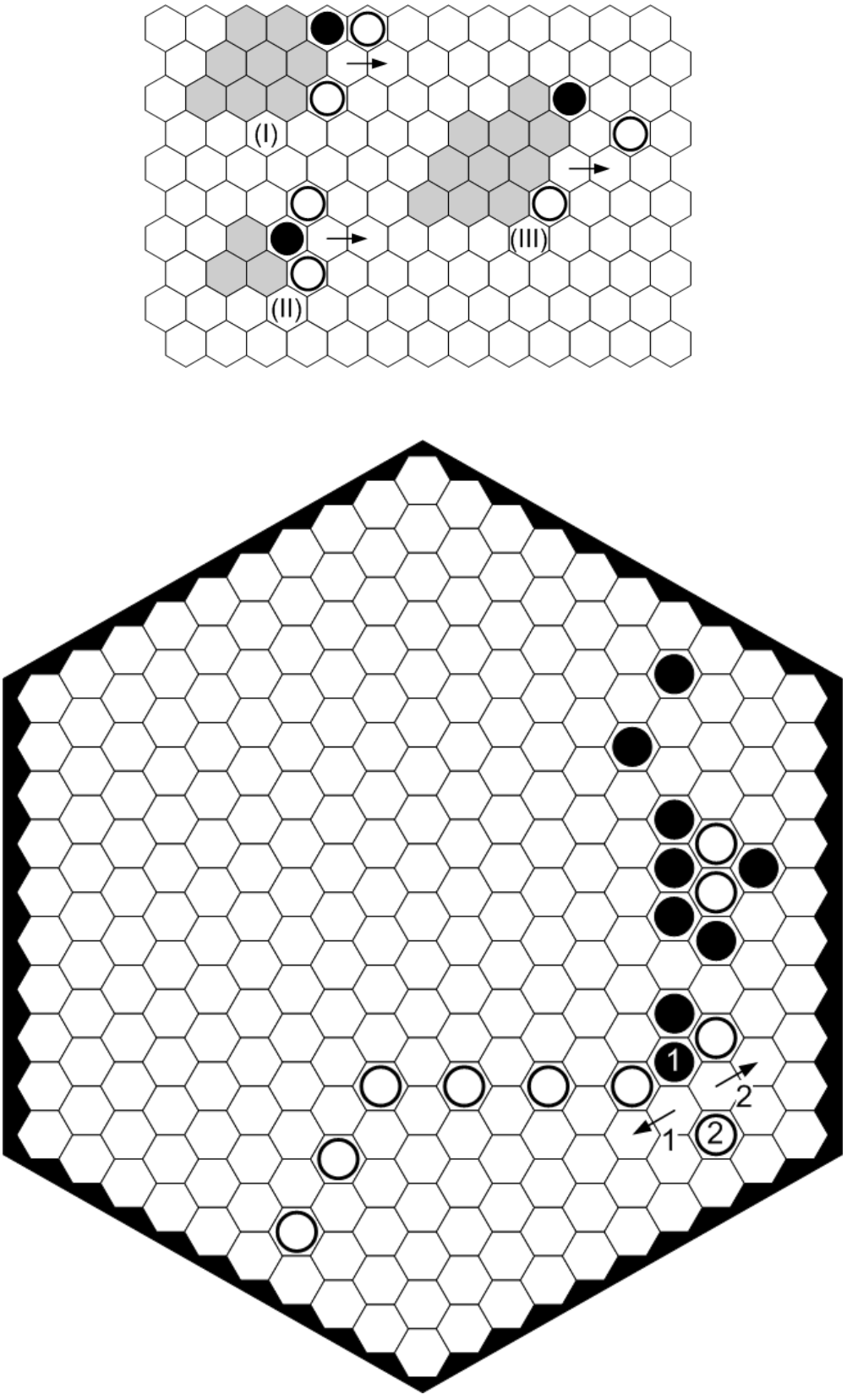

Abbildung 5.19: Leiter Beispiel

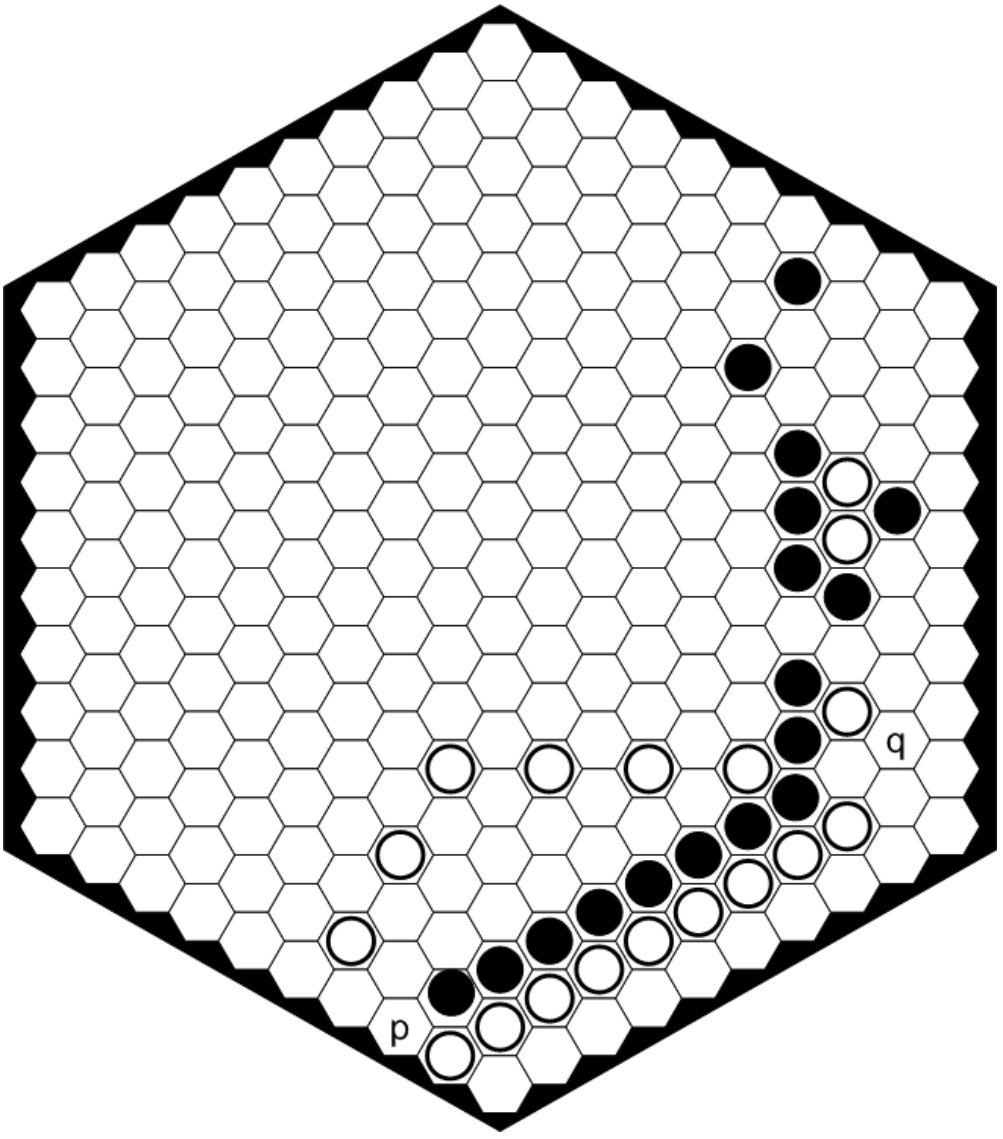

Abbildung 5.20: Leiter Beispiel 2

Leitern sind sehr komplexe Formationen. Bei Havannah muss gut überlegt werden, ob eine Leiter Sinn macht und ob dadurch der gegnerische Spiel nicht selber den größeren Vorteil erhält. Die Abbildung 5.19 verdeutlicht diesen Vorteil von Weiß. Schwarz zwingt mit Zug 1 Weiß zum Kontern. Mit Zug 2 eröffnet Weiß die Leiterformationen. Nun können zwei Leitern entstehen, Leiter 1 und Leiter 2. Leiter 2 bringt für Schwarz keinen Vorteil. Sie führt zu einem bereits verbundenen Rand. Leiter 1 führt direkt zum dritten benötigten Rand für Schwarz. Die Abbildung 5.20 zeigt das Ende der Leiter. Weiß hat immer Schwarz geblockt und somit eine Leiter erzeugt. Das Ende der Leiter zwingt nun Schwarz dazu, einen weiteren Zug zu machen, um die Verbindung zum Rand herzustellen. Ein guter Zug wäre das Feld p. Schwarz verfügt nun über einen aufspannenden 0-path Pfad zwischen drei verschiedenen Rändern. Ein Verbinden von alleb Ketten zu einer würde somit Schwarz den Sieg bringen. Doch durch die Leiter konnte Weiß ebenfalls einen Pfad aufbauen. Dieser ist ein 1-path Pfad. Mit dem Zwang von Schwarz auf das Feld p zu setzen, um den Rand zu sichern, kann Weiß mit Feld q seinen Pfad zu einem 0-path ändern. Ein Auszählen der Züge zeigt, das Weiß gewonnen hat.

Die Analyse hat gezeigt, das Schwarz durch das Erzwingen einer Leiter mit dem Spielen in den Flaschenhals, Weiß zum Sieg verholfen hat. Leitern müssen deswegen gut geplant werden. Eine Möglichkeit der Planung sind Ausbruchpunkte. Sie ermöglichen dem blockiertem Spieler die Leiter zu verlassen und das anvisierte Ziel zu erreichen. Die Abbildung 5.21 zeigt ein Beispiel wo ein schwarzer Stein einen Ausbruch aus der Leiter ermöglicht. Der graumarkierte Bereich entspricht dem Muster IIIa aus der Abbildung 5.14. In der Abbildung 5.22 ist die vollendete Leiter und der geglückte Ausbruch zu erkennen.

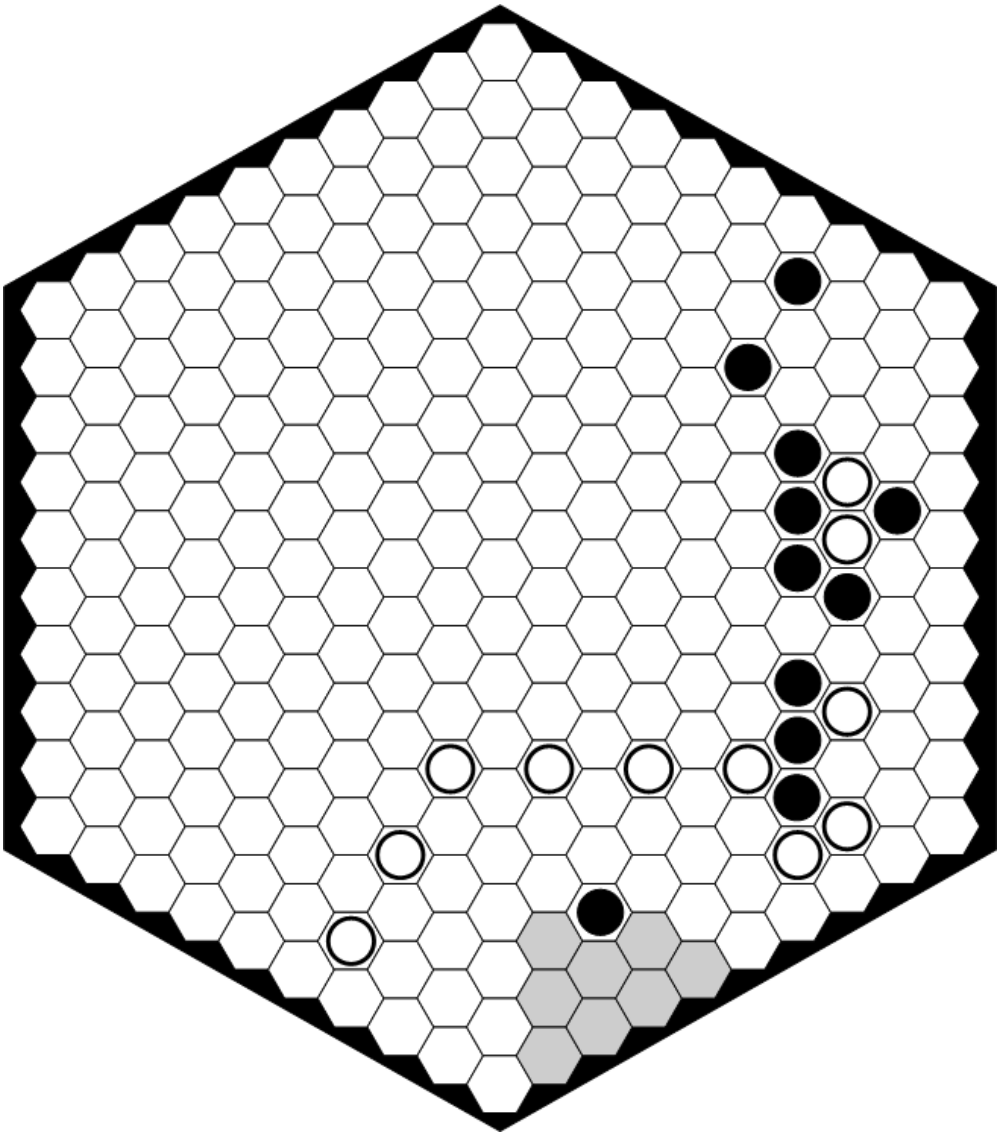

Abbildung 5.21: Ausbruch aus einer Leiter

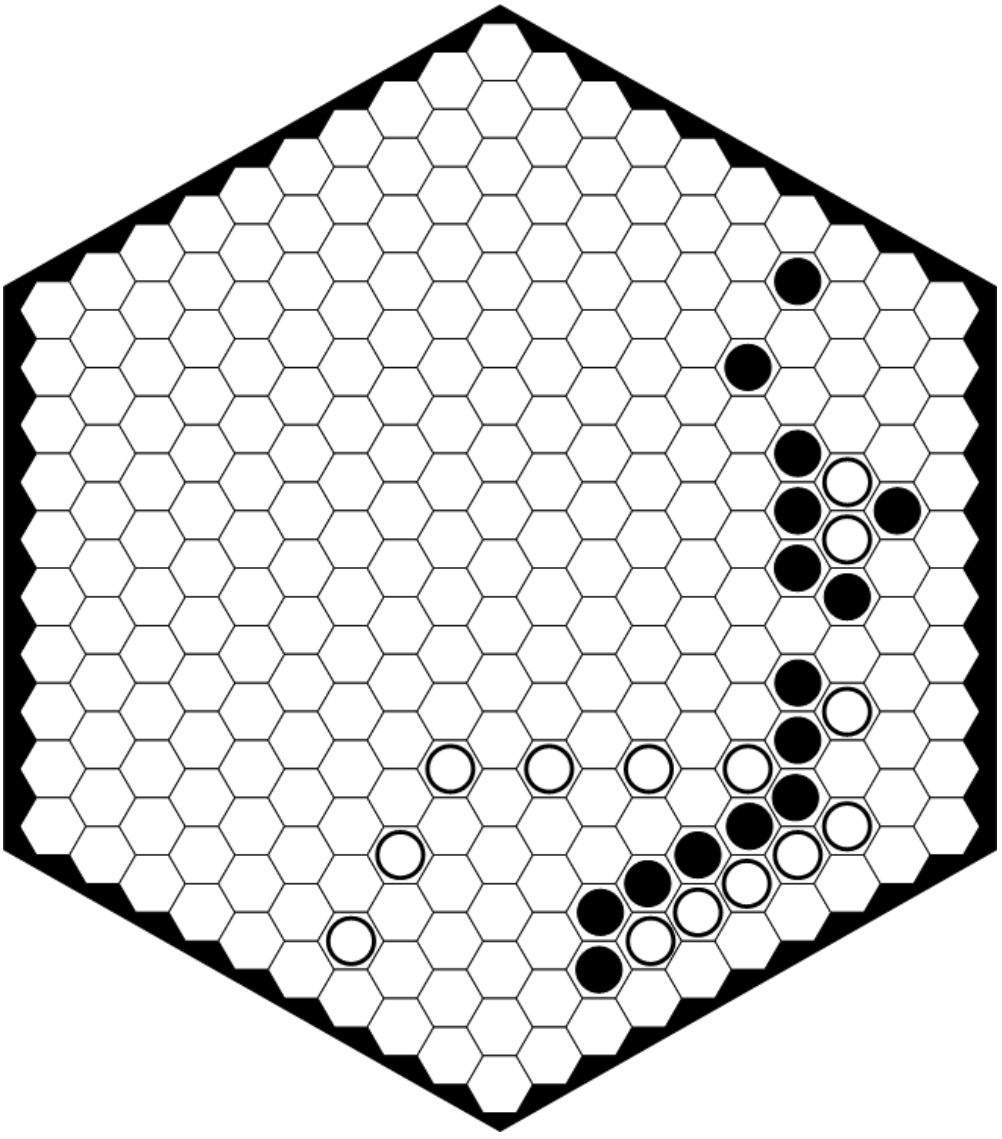

Abbildung 5.22: Ausbruch aus einer Leiter Fortsetzung

Kapitel 6

Interessante Spielsituationen

Das Spiel Havannah bietet viele Spielsituationen. Dieses Kapitel befasst sich mit den wichtigsten und interessantesten.

6.1 Matt in X Zügen

Vor allem für das Endspiel ist es von großer Interesse in wievielen Zügen das Spiel beendet ist. Eine Analyse kann sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Es muss für jede Siegbedingung jeder Pfad bzw. Ring berechnet werden. Die so entstandene Auflistung enthält alle Verbindungen, die für die Siegbedingungen relevant sind.

Ein Matt im Spiel Havannah entsteht durch eine Kette (s. Kapitel 4.2), die eine Formation für die Siegbedingung ***Brücke***, ***Gabel*** oder ***Ring*** darstellt. Für die Berechnung der Züge sind folgende Faktoren wichtig:

- Zusammenhangskomponente
- Anzahl der Brücken
- Überlagerte Brücken
- lokale Androhungen

Die Zusammenhangskomponente gibt die Anzahl der Züge an, die benötigt werden, um einen aufspannenden Pfad zu erzeugen oder einen sicheren Ring. Die Anzahl der Brücken ist ein Indikator für verletzbare Stellen innerhalb der Formation, genauso wie die Zusammenhangskomponente mit den Pivot-Punkten. Überlagerte Brücken bilden eine besondere Gefahr und sollten stets beobachtet werden. In Kapitel 5.3 wurden eine Möglichkeit der sicheren Verbindung von überlagerten Brücken vorgestellt. Ein besonderes Thema sind die lokalen Androhungen, die einen sicheren Pfad zunichte machen können. Innerhalb von maximal 5 Zügen kann der Gegner eine Ringandrohung erzeugen, auf die geantwortet werden muss. Diese Anzahl der Züge entspricht der Anzahl der Steine der

kleinsten Kreises minus eins. In der Abbildung 5.12 ist so ein Versuch der Ringandrohung gezeigt wurden.

Mit den ersten drei Punkten läßt sich eine Abschätzung über die minimale Zuganzahl treffen. Der Zusammenhangswert gibt die Pivot-Punkte an. Die Anzahl der so markierten Felder geht direkt in die Zuganzahl ein. Danach werden werden die Brücken gezählt. Bei der Berechnung der Brücken muss beachetet werden, dass durch die Pivot-Punkte neue Brücken entstehen. Für Pfade mit einem Zusammenhangswert von 0 ergibt sich die Anzahl der Brücken aus der Zahl der Ketten des Pfades abzüglich eins. Dieser Abzug kommt dadurch zustande, dass die Abschlussgruppen des Pfades nicht verbunden sind. Ähnlich sieht dies bei einem Ring mit einem Zusammenhangswert von 0 aus. Dort sind die Abschlussgruppen die selben. Die Anzahl der Brücke ist bei einem Ring somit gleich der Anzahl der Ketten. Überlagerte Brücken bedürfen einer genaueren Betrachtung. Denn durch ein falsches Schliessen der Verbindung kann man sehr schnell in Zugzwang kommen. Hier gilt die gleiche Regel für die Berechnung der Zuganzahl unter Einbehaltung der in Kapitel 5.4 gezeigten Reihenfolge der Züge. Somit ergibt sich folgende Gleichung für eine minimale Zuganzahl:

n...Zusammenhangswert

b...Anzahl der Brücken

bu...Anzahl der überlappenden Brücken

X...Anzahl der Züg bis Matt

Für einen Pfad ergibt sich X aus

$X = n + b + bu - 1$

Für einen Ring ist der Wert

$X = n + b + bu$

Eine Berechnung der Züge bis eine Siegbedingung eintritt ist ein guter Indikator für eine Bewertung der aktuellen Spielstellung. Bei der Berechnung fliessen sowohl die Pivot-Punkte mit ein, wie auch die Anzahl der Brücken.

6.2 maximale sichere Kantenentfernung

In Kapitel 5.5 wurde gezeigt, wie sich ein Bereich entwickelt durch den Zusammenschluss mehrerer direkter Nachbarschaften und Brückstufen eines Feldes. Dieser Bereich folgt dem gleichem Prinzip wie die Verbindungsmuster aus Kapitel 5.5.1. Wie sieht aber nun die maximale Entfernung aus für einen sicher verbundenen Stein bei einer beliebigen Anzahl von zusammengeschlossenen Ausgangsfeldern?

Ein Feld in einem sicheren Bereich setzt sich immer aus der Vereinigung mehrer Pfade zusammen. Jeder Pfad für sich muss unabhängig sein. D.h. seine freie Punktmenge muss eine disjunkte Vereinigung seiner Teilpfade sein. Es handelt sich dabei um 1-connected Pfade. Sie haben einen Zusammenhangswert von 1, da sie durch ein 1-step Stufe mit

dem zu untersuchenden Stein verbunden sind. Diese Stufe liegt entweder in der direkten Nachbarschaft oder es handelt sich um eine Brückenstufe. Die Entfernung eines sicher verbundenen Steines kann somit maximal so groß sein, wie der längste 1-path Pfad.

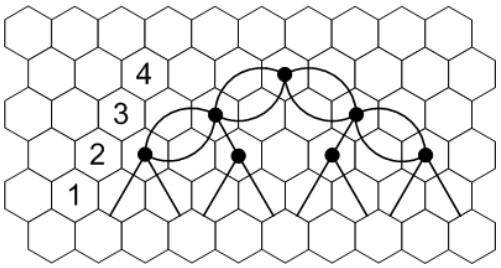

Abbildung 6.1: Beispielpfad mit Entfernung

Die Abbildung 6.1 zeigt einen 1-path Pfad. Gut zuerkennen ist die disjunkte freie Punktemenge und die Ausbreitung des Pfades. Ein sicherer Pfad braucht für die Ausdehnung von einer Entfernung zur nächst niedrigeren immer doppelt Platz. Dies kommt durch die Bedingung zustande, dass die zwei abgehenden Teilpfade unabhängig sein müssen. Somit ergibt sich für die minimale Breite $minW$ für die Entfernung d folgende Formel $minW = 2^{d-1}$. Die Tabelle 6.1 zeigt die Wert für die ersten Entfernungen.

Entfernung	minimale Breite
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Tabelle 6.1: Pfadbreite in Abhängigkeit der Entfernung

Um eine Aussage zu treffen in welcher maximalen Entfernung ein Feld sicher ist, wird noch die maximale Ausbreitung von einer Entfernung zu nächsten kleineren benötigt. In Kapitel 5.1.2 wurde gezeigt, dass Brücken die größte sichere Entfernung auf dem Spielbrett zurücklegen. Ein Pfade mit der Länge 4 baut immer auf Pfaden mit einer Länge von 3 auf. Das bedeutet, dass die maximale Ausbreitung von Entferungsstufe 4 zu 3 durch 2 Brücken erzielt wird, die eine disjunkte freie Punktmenge haben. In der Abbildung 6.1 ist so eine Ausdehnung von Stufe 4 zu Stufe 3 zu erkennen. Der Zuwachs der Ausdehnung beträgt 2 Mal der Entfernung einer Brücke minus 1. Der Abzug von 1 kommt durch die gleiche Ausgangsstufe zustande. Somit ergibt sich ein Zuwachs von 3 für jede Entfernungsstufe. Die maximal mögliche Ausdehnung $maxA$ ergibt sich somit aus den Entfernungen d zum Ziel und b einer Brücke. Die Formel lautet $maxA = 1{+}3{*}(d-1)$. Die Tabelle 6.2 zeigt die Ausdehnung für die ersten Entfernungswerte.

Bis zur Entfernung $d = 4$ ist die maximale Ausdehnung größer wie die minimale benötigte Breite für einen sicheren Pfad. Bei einer Entfernung ≥ 5 kann kein sicherer Pfade mehr erstellt werden. Durch Leitern (s. Kapitel 5.6) und Ringandrohungen (s. Kapitel 5.12) ist es dennoch möglich bei Entfernung von ≥ 5 eine Verbindung herzustellen. Mit Hilfe von Pfaden kann nur bis zu einer Entfernung von 4 eine sichere Verbindung gewährleistet werden.

Entfernung	maximale Ausdehnung
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13

Tabelle 6.2: maximale Ausdehnung durch Brücken

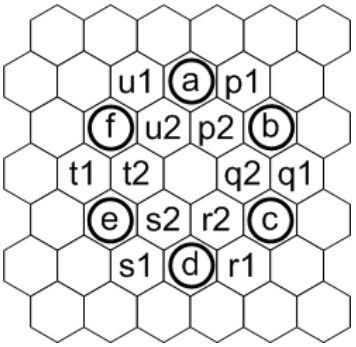

Abbildung 6.2: Formation eines Doppelkreis; Schwarz am Zug

6.3 Doppelkreis

Ein Doppelkreis ist ein gutes Beispiel dafür, dass sichere Verbindungen auch gut geplant werden sollten. Das Beispiel aus der Abbildung 6.2 zeigt einen solchen doppelten Kreis. Weiß hat in 6 Spielzügen einen 0-connected Ring erzeugt $0{-}ring\,\{< a > bcdef\,\{p1, p2, q1, q2, r1, r2, s1, s2,$ Dieser Ring ist nach der Definition in Kapitel 4.6 und der Anzahl der Spielzüge in Kapitel 6.1 für Weiß ein sicherer Sieg. Die Anordnung der freien Punktmenge ergibt ebenfalls einen Ring $6 - ring\,\{\underline{p2}\underline{q2}\underline{r2}\underline{s2}\underline{t2}\underline{u2}\}$. Da jeder Pivot-Punkt dieses zweiten Ringes eine Bedrohung für Weiß ist, kann Schwarz durch benutzen der Pivot-Punkte Weiß immer zu einem Spielzug zwingen.

Die Abbildung 6.3 zeigt den gleichen Doppelkreis einige Spielzüge später. Schwarz hat die Bedrohung und die Chance erkannt und fängt mit der Wahl der Pivot-Punkte an. Mit Zug 9 droht nun Schwarz einen Ring an. Gleichzeitig bedroht der schwarze Stein auch die Brückenverbindung. Der Ring würde für Weiß die Niederlage bedeuten, also muss dieser Bedrohung beantwortet werden mit Feld r. Somit hat Schwarz die Möglichkeit die Brücke zu durchbrechen und die 0-connected Ring von Weiß zu zerstören. Dafür wählt Schwarz Feld p.

Spielsituationen, wie die eben erläuterte verlaufen nach einem gleichen Muster ab. Wenn eine Formation, die einen Sieg bringt, eine nicht disjunkte Punktmenge mit einer anderen Siegformation besitzt. Unterschiedliche Zuganzahl für das Fertigstellen der Siegformationen bringt den Spieler mit dem geringeren Wert einen Vorteil. Bei gleicher Anzahl liegt der Vorteil bei dem Spieler, der nach der Berechnung am Zug ist.

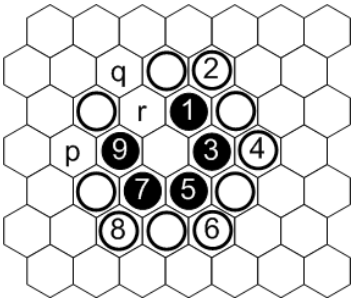

Abbildung 6.3: Schlüsselpunkt des Doppelkreises; Weiß am Zug

Kapitel 7

Fazit

Die vorgestellten Strategien haben gezeigt, wie schwierig es ist, für ein offenbar einfaches Spiel wie Havannah einen Gegenspieler zu simulieren. Durch die simultanen Siegbedingungen kann jeder Verbindung und jeder Stein wichtig sein. Für eine effektive Zugauswahl muss jede Verbindung untersucht werden. Am Anfang und Ende einer Partie ist der Aufwand relativ gering, da nur wenige Verbindungen vorhanden sind oder aufgelöst wurden und als Ketten verfügbar sind.

Es wurden Strategien und komplexe Verbindungen vorgestellt, die auf einfachen Strukturen, der direkten Nachbarschaft und Brücken, beruhen. Für diese einfacheren Strukturen wurde eine Überleitung in ein Graphenmodell gezeigt und die Vereinfachung für Entfernung und Faltung aufgeführt.

Anhand der gezeigten Vereinfachung und der Aufbau der Siegbedingung ist es möglich ein Computerprogramm zu entwickeln, welches die gestellten Aufgabe bewältigt. Parallel zu dieser Arbeit wurden die ersten Strukturen in Java implementiert. Ein Ausblick für die Zukunft sieht die Komplettierung dieses Programmes und eine Integration in die Internetplattform von Mindsports.nl vor.

Anhang A

Glossar

In dieser Diplomarbeit wurden an verschiedenen Stellen Fachbegriffe oder englische Bezeichnungen verwendet, die im folgenden kurz erläutert werden sollen:

Brettspiel S. 1
Das Brettspiel ist ein Spiel mit einem Spielbrett als zentrales Element. Auf dem Brett agieren die Spieler mit Figuren, Steinen oder anderen Materialien.

Eckstein S. 2, 4
Auf dem Spielbrett von Havannah gibt es sechs Ecksteine. Eine Verbindung von zwei beliebigen Ecksteine erfüllt die Siegbedingung ***Brücke*** und führt zum Gewinn des Spieles.

Formation S. 1, 4
Eine Formation ist ein Gebilde oder Struktur, die durch Steine auf dem Spielbrett erzielt wird.

Hex S. 1, 2
Hex ist ein Brettspiel, das unabhängig von Piet Hein und John Nash entwickelt wurde. Gespielt wird auf einen rhombenförmigen Brett mit einer Kantenlänge von 11 Feldern. Die einzelnen Felder sind sechseckförmig.

Kette S. 4
Zusammenhänge Formation von Spielsteinen. Eine Kette bildet keinen Angriffspunkt.

Knotenpunkt S. 3
Strategischer wichtiger Punkt in der Anfangsphase des Spieles.

Netzwerk S. 7

Randstein S. 2, 4
Auf dem Spielbrett von Havannah gibt es sechs Ränder. Die Anzahl richtet sich nach der Größe des Spielbrettes. Auf einem Brett mit der Kantenlänge von 8 gibt es 6 Randsteine (8 bei einer Kantenlänge von 10). Eine zusammenhängende Verbindung

von drei unterschiedlichen Randsteinen erfüllt die Siegbedingung ***Gabel*** und führt zum Gewinn des Spieles.

Siegbedingung Brücke S. 1, 2, 4, 55
Eine zusammenhängende Verbindung von Spielsteinen der einer Farbe zu zwei verschiedenen Ecken des Spielfeldes.

Siegbedingung Gabel S. 1, 2, 55
Eine zusammenhängende Verbindung von Spielsteinen der einer Farbe zu drei verschiedenen Rändern des Spielfeldes.

Siegbedingung Ring S. 1, 4, 55
Eine geschlossene zusammenhängende Verbindung aus mindestens sechs Spielsteinen einer Farbe. Die Verbindung muss mindestens ein Feld eingrenzen, das nicht zu dieser Verbindung gehört. Dabei spielt es keine Rolle, ob die eingegrenzten Felder belegt sind, anders in der Ravensburger-Version. Hier muß mindestens ein fremder Stein innerhalb des ***Ringes*** sein.

TwixT S. 1
Twixt ist ein Verbindungsspiel. Es wurde entwickelt von Alex Rudolph um 1960. Gespielt wird auf einem rechteckigen Gitter mit 24 x 24 Punkten. Ziel des Spieles ist es durch gezieltes Setzen von Spielsteinen eine Verbindung zwischen gegenüberliegende Seite zu erzielen. Dabei gelten nur die Spielstein als verbunden, die einen Rösselsprung entfernt sind.

Verbindungsspiel S. 1
Abwechselndes tätigen eines Spielzuges mit der Absicht eine Verbindung zwischen zwei Punktes des Spielfeldes herzustellen. Die Verbindung besteht nur aus Spielsteinen der eigenen Farbe.

Literaturverzeichnis

[Bol94] Boll, David: *HEX: Answers to common questions*, 1994. Im Internet unter URL http://www.gamerz.net/pbmserv/hex.html.

[Bro00] Browne, Cameron: *Hex strategy.* A K Peters, 2000.

[Die00] Diestel, Reinhard: *Graphentheorie.* Springer, 2., neu bearb. und erw. Auflage, 2000. Im Internet unter URL http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/.

[Faa06] Faase, Frans: *Formalisation of the game Havannah*, 2006. Im Internet unter URL http://www.iwriteiam.nl/Havannah.html.

[FP97] Fremuth-Paeger, Christian: *Degree constrained subgraph problems and network flow optimization.* Augsburg : Wißner, 1997.

[Fre02] Freeling, Christian: *Havannah Contest*, November 2002.

[ST75] Schensted, C. und C. Titus: *Mudcrack Y and Poly-Y.* NEO Press, Peaks Island, 1975.

[Sti99] Stingl, Peter: *Mathematik für Fachhochschulen.* Hanser, 6., verb. Aufl. Auflage, 1999.

[Tur04] Turau, Volker: *Algorithmische Graphentheorie.* Oldenbourg, 2., überarb. Auflage, 2004.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Leipzig, den 23. März 2006.